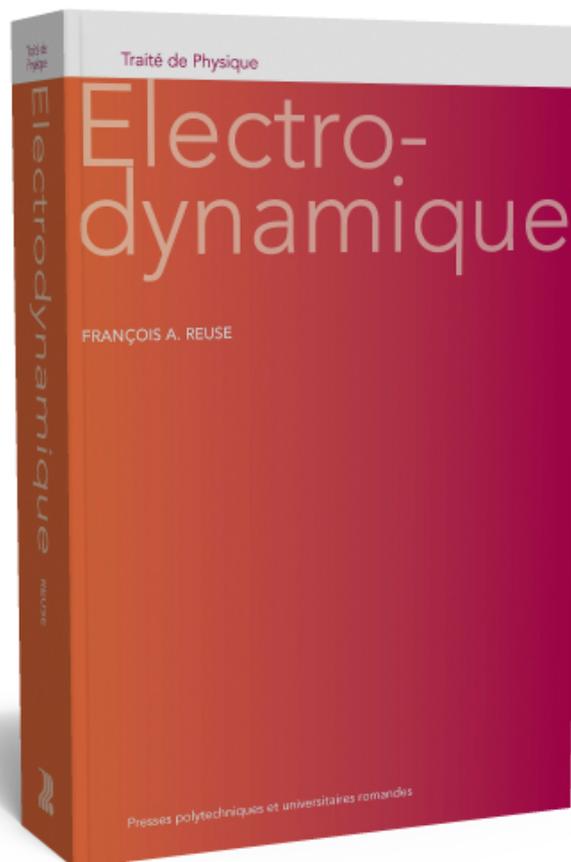


**TRAITE DE PHYSIQUE :
ELECTRODYNAMIQUE**

SOLUTIONS DES EXERCICES

Stephan Fedrigo et François A. Reuse

6 novembre 2012



AVERTISSEMENT

L'ordre dans lequel les exercices sont proposés dans chaque chapitre correspond à l'ordre dans lequel les sujets y sont abordés. Les exercices ne sont donc pas présentés dans un ordre de difficultés croissantes bien que la plupart des exercices qui figurent en fin de liste soient annoncés d'un niveau de difficulté élevé.

Les exercices qui présentent un niveau de difficulté particulier comportent une étoile (★) à la suite du numéro (numéros représentés avec un grisé dans le livre)

Table des matières

1	Solutions des exercices du chapitre 1	1
2	Solutions des exercices du chapitre 2	9
3	Solutions des exercices du chapitre 3	43
4	Solutions des exercices du chapitre 4	75
5	Solutions des exercices du chapitre 5	135
6	Solutions des exercices du chapitre 6	171
7	Solutions des exercices du chapitre 7	227
8	Solutions des exercices du chapitre 8	277

Chapitre 1

Solutions des exercices du chapitre 1

Exercice 1.1

Quelques ordres de grandeurs.

- (a) Quelle est la masse d'une charge électrique de +1.0 Coulomb faite de protons ?
- (b) Quelle est la masse d'une charge électrique de -1.0 Coulomb faite d'électrons ?
- (c) Quelle est l'intensité de la force de répulsion entre deux charges électriques de chacune 1.0 Coulomb distantes de 1.0 mètre ?
- (d) Quelle est l'intensité de la force qui attire un proton et un électron supposés distants de 0.1 nanomètre ? Cette distance est de l'ordre de grandeur du rayon d'un atome. Quelle accélération cette force confère-t-elle à l'électron ?

Charge électrique du proton : $1.60 \times 10^{-19} [C]$

Masse du proton : $1.67 \times 10^{-27} [kg]$

Masse de l'électron : $0.911 \times 10^{-30} [kg]$

Réponses :

- a) $1.04 \cdot 10^{-8} [kg]$.
- b) $0.57 \cdot 10^{-11} [kg]$.
- c) $0.90 \cdot 10^{10} [N] \approx 920$ tonnes.
- d) $2.30 \cdot 10^{-8} [N]$. Accélération : $25. [mm/(ps)^2]$.
1. $[mm] = 10^{-3} [m]$ et 1. $[ps] = 10^{-12} [s]$.

Exercice 1.2

On considère la distribution suivante de charges électriques ponctuelles de signes opposés occupant les sommets d'un cube de côté $2a$. La figure 1.1 décrit la situation envisagée.

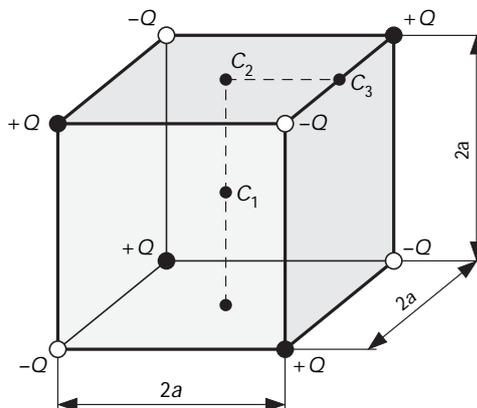


FIGURE 1.1 – Distribution de charges électriques ponctuelles. Les sommets d'un cube de côté $2a$ sont occupés par des charges ponctuelles de valeurs opposées, toutes de mêmes valeurs absolues, de telle manière que deux voisins selon les arêtes sont de valeurs opposées.

Quel est le champ électrique au centre du cube (point C_1), au centre des faces (points C_2) et au milieu des arêtes (points C_3) ?

Indication : Quand cela est possible faire appel à des arguments de symétrie.

Réponses :

Par rapport au système de coordonnées cartésiennes dont l'origine occupe le centre C_1 du cube et qui est orienté de telle manière que le point de coordonnées (a, a, a) est occupé par une charge électrique $+Q$ on a :

1. Le champ électrique en C_1 vaut $\mathbf{E}(0, 0, 0) = \mathbf{0}$
2. Le champ électrique en C_2 vaut $\mathbf{E}(a, 0, 0) = \mathbf{0}$
3. Le champ électrique en C_3 vaut :

$$\mathbf{E}(a, a, 0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{a^2} \left[\frac{2}{(\sqrt{5})^3} - \frac{28}{27} \right] \mathbf{e}_3 \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1.7}{a^2} \mathbf{e}_3$$

Exercice 1.3

On considère de nouveau la distribution de charges électriques ponctuelles de l'exercice 1.2.

- a) Quelle énergie $W(\Gamma)$ faut-il fournir pour transporter une charge électrique ponctuelle Q_0 de l'infini au centre du cube ?
- b) Montrer que le potentiel $\Phi(\mathbf{x})$ est une fonction impaire par rapport au centre du cube. Cette dernière position, au centre du cube, est-elle une position stable pour la charge Q_0 ?

- c) Evaluer le potentiel $\Phi(\mathbf{x})$ au voisinage du centre du cube par un développement en série de puissances des composantes x^1, x^2 et x^3 jusqu'à et y compris l'ordre 3.

Réponses :

- a) $W(\Gamma) = 0$ où Γ désigne un chemin de l'infini à l'origine des coordonnées.
 b) $\Phi(-\mathbf{x}) = -\Phi(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x}$. La position $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$ est une position instable pour la charge Q_0
 c)

$$\Phi(\mathbf{x}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{30}{(\sqrt{3})^7} \frac{x^1 x^2 x^3}{a^4} + O(\|\mathbf{x}\|^5) \quad \text{lorsque } \|\mathbf{x}\| \ll a$$

Exercice 1.4

Soit une charge électrique ponctuelle Q située en \mathbf{x}_0 . Peut-on à l'aide d'une seconde charge électrique ponctuelle Q^* située en \mathbf{x}_0^* produire un potentiel électrique total $\Phi(\mathbf{x})$ tel que

$$\Phi(\mathbf{x}) = 0. \quad \text{sur la sphère } \|\mathbf{x}\| = R > 0.$$

Réponse :

Oui si et seulement si :

$$\mathbf{x}_0^* = \frac{R^2}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \mathbf{x}_0 \quad \text{et} \quad Q^* = -\frac{R}{\|\mathbf{x}_0\|} Q$$

Le potentiel qui satisfait à la condition requise s'écrit donc,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} + \frac{Q^*}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*\|} \right)$$

Exercice 1.5

Soit le champ de vecteurs $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ dont les composantes par rapport à un repère orthonormé s'écrivent

$$V^1(\mathbf{x}) = -\frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \quad V^2(\mathbf{x}) = +\frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \quad \text{et} \quad V^3(\mathbf{x}) = 0$$

Evaluer l'intégrale de chemin

$$I_\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

pour tout chemin fermé Γ qui ne coupe pas l'axe $x^1 = x^2 = 0$. Commenter votre résultat.

Solution :

Soit $[a, b] \ni t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ le chemin Γ . Alors

$$\begin{aligned}
I_\Gamma &= \int_\Gamma \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \\
&= \int_a^b \left(-\frac{x^2(t)}{(x^1(t))^2 + (x^2(t))^2} \frac{dx^1(t)}{dt} + \frac{x^1(t)}{(x^1(t))^2 + (x^2(t))^2} \frac{dx^2(t)}{dt} \right) dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{1 + (x^2(t)/x^1(t))^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{x^2(t)}{x^1(t)} \right) dt = \arctan \left(\frac{x^2(t)}{x^1(t)} \right) \Big|_a^b
\end{aligned}$$

Posons $x^2(t)/x^1(t) = \tan \theta(t)$. Ainsi, si le chemin Γ est fermé, autrement dit si $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}(b)$ alors

$$I_\Gamma = n 2\pi$$

où n est le nombre de tours effectués dans le sens positif par le chemin Γ autour de l'axe $x^1 = x^2 = 0$. Les tours effectués dans le sens négatif sont comptés négativement.

Exercice 1.6

Soit la fonction

$$f(\mathbf{x}) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3 - a)^2}}$$

Calculer la valeur de l'intégrale de surface

$$J_S = \int_S f(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x})$$

où la surface S est la sphère de rayon R centrée à l'origine. Discuter le résultat.

Solution :

En coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
J_S &= \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R \cos \theta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2 a R \cos \theta}} \\
&= 2\pi R^3 \int_{-1}^{+1} du \frac{u}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2 a R u}} \\
&= \frac{-2 \pi R}{3 a^2} (R^2 + a^2 + a R u) \sqrt{R^2 + a^2 - 2 a R u} \Big|_{-1}^{+1}
\end{aligned}$$

où nous avons procédé au changement de variable d'intégration de θ en $u = \cos \theta$. Finalement,

$$J_S = \begin{cases} \frac{4 \pi a^3}{3} \frac{R}{a^2} & \text{si } a \leq R \\ \frac{4 \pi R^3}{3} \frac{R}{a^2} & \text{si } a \geq R \end{cases}$$

Exercice 1.7

Soit le champ de vecteurs $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ dont les composantes par rapport à un repère orthonormé s'écrivent

$$D^j(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi} \frac{x^j - a \delta_3^j}{(\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3 - a)^2})^3}, \quad j = 1, 2, 3$$

Evaluer l'intégrale de flux

$$F_S = \int_S \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$$

pour la surface constituée par le parabolôide de révolution tronqué S d'équation

$$x^3 = a \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2}{r_0^2} \quad \text{limité par la condition : } x^3 \leq a > 0$$

L'orientation polaire de cette partie de surface est à votre convenance. La figure 1.2 décrit la situation envisagée.

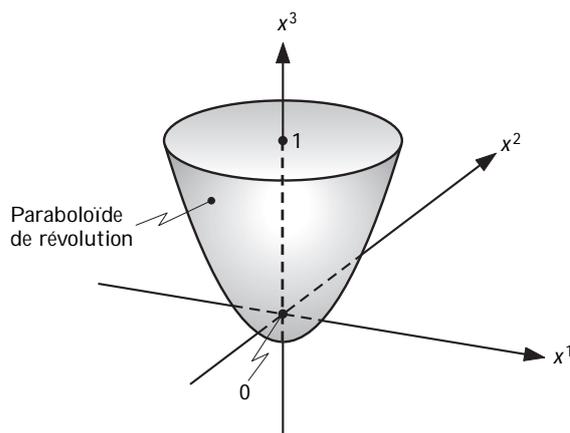


FIGURE 1.2 – Parabolôide de révolution tronqué.

Solution :

En coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) l'équation du parabolôide s'écrit

$$x^1 = r \cos \phi, \quad x^2 = r \sin \phi \quad \text{et} \quad x^3 = z$$

et les composantes cartésiennes de l'élément de surface $d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ orienté de manière polaire vers l'"extérieur" du parabolôide s'écrivent

$$d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \left(2 \frac{a r}{r_0^2} \cos \phi, \quad 2 \frac{a r}{r_0^2} \sin \phi, \quad -1 \right) r \, d\phi \, dr$$

et l'intégrale de flux prend la forme

$$\begin{aligned}
F_S &= \int_S \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \\
&= \int_0^{r_0} r \, dr \int_0^{2\pi} d\phi \frac{Q a}{4\pi} \frac{(r/r_0)^2 + 1}{\left(\sqrt{r^2 + a^2((r/r_0)^2 - 1)^2}\right)^3}
\end{aligned}$$

Après intégration par rapport à la variable angulaire ϕ puis changement de la variable d'intégration de r en

$$u = \frac{r_0}{a} \frac{r/r_0}{1 - (r/r_0)^2} \quad \text{où} \quad \frac{du}{dr} = \frac{1}{a} \frac{1 + (r/r_0)^2}{(1 - (r/r_0)^2)^2}$$

il vient

$$\begin{aligned}
F_S &= \int_S \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{2} \int_0^{+\infty} du \frac{u}{(\sqrt{u^2 + 1})^3} \\
&= \frac{Q}{2} \frac{-1}{\sqrt{u^2 + 1}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{Q}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 1.8

Soient deux dipôles électriques \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 situés en \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 respectivement. Déterminer les forces qui s'exercent entre ces deux dipôles électriques par l'intermédiaire du champ électrique qu'ils créent. Vérifier que la loi de l'action et de la réaction est satisfaite et discuter le résultat en fonction de l'orientation de ces dipôles électriques. Notamment vérifier que lorsque :

1. Les moments dipolaires électriques sont orthogonaux au vecteur de position relative $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ alors ces forces sont respectivement attractives ou répulsives selon que les orientations de ces dipôles sont opposées ou parallèles entre elles.
2. Les moments dipolaires électriques sont parallèles ou opposés au vecteur de position relative $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ alors ces forces sont respectivement répulsives ou attractives selon que les orientations de ces dipôles sont opposées ou parallèles entre elles.

Solution :

Constater d'abord que le champ électrique produit au point \mathbf{x}_2 par le dipôle électrique \mathbf{p}_1 s'écrit :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_2) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^3} \quad \text{où} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|}$$

En déduire que l'énergie de liaison des dipôles électriques \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 a pour expression :

$$E_{12} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n})}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^3}$$

Il résulte de l'expression du champ électrique dû au dipôle électrique \mathbf{p}_1 que la force subie par le dipôle \mathbf{p}_2 s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} &= \frac{3}{4\pi \varepsilon_0} \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 5 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n})) \mathbf{n} + (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{p}_2 + (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{p}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^4} \\ &= \frac{3}{4\pi \varepsilon_0} \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n})) \mathbf{n} + (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{p}_2^\perp + (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{p}_1^\perp}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^4} \end{aligned}$$

Dans cette expression le symbole \mathbf{p}_1^\perp désigne la composante du moment dipolaire électrique \mathbf{p}_1 qui est orthogonale au vecteur de position relative des deux dipôles. On notera finalement que

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} + \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \mathbf{0}$$

Finalement, dans la situation 1) on a

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{4\pi \varepsilon_0} \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) \mathbf{n}}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^4} \quad \text{ou encore} \quad E_{12} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^3}$$

et dans la situation 2)

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{4\pi \varepsilon_0} \frac{(-2 \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) \mathbf{n}}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^4} \quad \text{ou encore} \quad E_{12} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{-2 \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^3}$$

Exercice 1.9

Soient deux charges électriques ponctuelles de valeurs opposées situées en $\mathbf{x} = (0, 0, a)$ pour la charge Q et en $\mathbf{x} = (0, 0, -a)$ pour la charge $-Q$. La coordonnée a est supposée positive. Calculer le flux F du champ de déplacement électrique $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ au travers du plan médiateur $x^3 = 0$ relatif aux positions de ces deux charges. L'orientation polaire de la surface que constitue ce plan médiateur est laissée à choix.

Solution :

Notons $\boldsymbol{\rho} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{a} = a \mathbf{e}_3$. L'expression du champ de déplacement électrique dans le plan $x^3 = 0$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\boldsymbol{\rho}) &= \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{\boldsymbol{\rho} + \mathbf{a}}{\|\boldsymbol{\rho} + \mathbf{a}\|^3} - \frac{\boldsymbol{\rho} - \mathbf{a}}{\|\boldsymbol{\rho} - \mathbf{a}\|^3} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi} \frac{2 \mathbf{a}}{\sqrt{\rho^2 + a^2}^3} \end{aligned}$$

où on a posé $\rho = \|\boldsymbol{\rho}\|$. Finalement

$$\begin{aligned}
F &= \int_{x^3=0} \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi} \int_0^{+\infty} 2\pi \rho \, d\rho \frac{2a}{(\sqrt{\rho^2 + a^2})^3} \\
&= Q \frac{-a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \Big|_0^\infty = Q
\end{aligned}$$

Exercice 1.10

A partir de l'expression (1.59) de l'énergie d'un dipôle électrique rigide \mathbf{p} situé au point \mathbf{x} mis en présence d'un champ électrique extérieur $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ montrer qu'un tel dipôle subit un moment de force $\check{\mathcal{M}}$ de valeur $\check{\mathcal{M}} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x})$. Ensuite considérer, comme dans l'exercice 1.8., un système formé de deux dipôles électriques et montrer que le moment total des forces

$$\check{\mathcal{M}} = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} + \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} + \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{p}_2 \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}_2)$$

que subit ce système est nul.

Solution :

Il suffit, dans l'expression de $\check{\mathcal{M}}$, d'inclure les expressions des forces $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ et $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ établies dans l'exercice 1.8. pour parvenir au résultat souhaité après développement.

Chapitre 2

Solutions des exercices du chapitre 2

Exercice 2.1

Déterminer le potentiel électrique et le champ électrique de la distribution de charge électrique donnée par la densité

$$q(\mathbf{y}) = \frac{Q a^3}{8 \pi} \exp(-a y) \quad , \quad a > 0$$

où $y = \|\mathbf{y}\|$. Quelle est l'énergie électrostatique de cette distribution de charge électrique? Discuter le cas limite $a \rightarrow +\infty$.

Solution :

La marche à suivre est similaire à celle adoptée à la sous-section 2.2.2. Le potentiel électrostatique est donné par l'intégrale

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q a^3}{8 \pi} \int_0^{+\infty} y^2 dy \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\exp(-a y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2 x y \cos \theta}}$$

Les intégrations relatives aux variables angulaires ϕ et θ étant effectuées, il vient

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q a^3}{4 x} \int_0^{+\infty} y dy (|x+y| - |x-y|) \exp(-a y) \\ &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q a^3}{2 x} \left[\int_0^x y^2 dy \exp(-a y) + x \int_x^{+\infty} y dy \exp(-a y) \right] \end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^x y^2 dy \exp(-a y) = \frac{2}{a^3} - \frac{(1+ax)^2 + 1}{a^3} \exp(-a x)$$

et

$$\int_x^{+\infty} y dy \exp(-a y) = \frac{1+ax}{a^2} \exp(-a x)$$

Par conséquent

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{x} \left[1 - \frac{2+ax}{2} \exp(-a x) \right]$$

Quant au champ électrique, il est radial. Il est donné par l'expression

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{x} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{x^3} \left[1 - \frac{(1+ax)^2 + 1}{2} \exp(-a x) \right]$$

Le champ électrique peut également être déterminé à l'aide de la loi de Gauss si l'on anticipe la symétrie sphérique de ce dernier champ. En effet, selon la loi de Gauss, la composante radiale de ce champ est alors donnée par l'expression

$$E_r(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi x^2} \int_0^x 4\pi y^2 dy q(\mathbf{y}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q a^3}{8\pi} \frac{1}{x^2} \int_0^x y^2 dy \exp(-a y)$$

Quant à l'énergie électrostatique W de la distribution de charge électrique, vu l'expression (2.14), elle s'écrit

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dV(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} 4\pi x^2 dx \frac{Q a^3}{8\pi} \exp(-ax) \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{x} \left[1 - \frac{2+ax}{2} \exp(-ax) \right] \\ &= \frac{Q^2 a^3}{16\pi \varepsilon_0} \int_0^{+\infty} x dx \left(\exp(-ax) - \frac{2+ax}{2} \exp(-2ax) \right) \\ &= \frac{Q^2 a^3}{16\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4 a^2} - \frac{1}{8 a^2} \right) = \frac{Q^2 a}{4\pi \varepsilon_0} \frac{5}{32} \end{aligned}$$

Lorsque $a \rightarrow \infty$ l'énergie électrostatique devient infinie.

Exercice 2.2

Déterminer le potentiel électrique et le champ électrique de la distribution de charge électrique donnée par la densité :

$$q(\mathbf{y}) = \begin{cases} q_0 \cos(k y) & \text{si } y \leq R \\ 0 & \text{si } y > R \end{cases}$$

où $y = \|\mathbf{y}\|$, $k = n\pi/R$ avec $R > 0$ et $n = 1, 2, 3, \dots$. Considérer la situation limite où $n \rightarrow \infty$.

Solution :

La marche à suivre est similaire à celle adoptée à la sous-section 2.2.2. Le potentiel électrostatique de la distribution de charge électrique est donné par l'intégrale,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^R y^2 dy \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\cos(k y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2 x y \cos \theta}}$$

Les intégrations relatives aux variables angulaires ϕ et θ étant effectuées et si $x \leq R$ il vient,

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{q_0}{4\pi \varepsilon_0} \frac{2\pi}{x} \int_0^R y dy (|x+y| - |x-y|) \cos(k y) \\ &= \frac{q_0}{4\pi \varepsilon_0} \frac{4\pi}{x} \left[\int_0^x y^2 dy \cos(k y) + x \int_x^R y dy \cos(k y) \right] \end{aligned}$$

Par contre, lorsque $R \leq x$ alors,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{4\pi \varepsilon_0} \frac{4\pi}{x} \int_0^R y^2 dy \cos(k y)$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^x y^2 dy \cos(k y) &= \frac{2}{k} \left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{k^2} \right) \sin(k x) + \frac{x}{k} \cos(k x) \right] \\ \text{et} \\ \int_x^R y dy \cos(k y) &= \frac{1}{k^2} \left[\cos(k R) - \cos(k x) - k x \sin(k x) \right] \end{aligned}$$

Par ailleurs, la charge électrique totale du système est donnée par l'intégrale,

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} dV(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) = \int_0^R 4\pi y^2 dy q_0 \cos(k y) = \frac{8\pi q_0 R}{k^2} \cos(k R)$$

Finalement, lorsque $x \leq R$,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{k^2} \left[\cos(k R) + \cos(k x) - 2 \frac{\sin(k x)}{k x} \right]$$

et lorsque $R \leq x$,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{x}$$

Quant au champ électrique, il est radial. Lorsque $x \leq R$, il s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= -\frac{\mathbf{x}}{x} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial x} \\ &= \frac{q_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{\sin(kx)}{kx} + 2 \frac{(kx) \cos(kx) - \sin(kx)}{(kx)^3} \right] \mathbf{x} \end{aligned}$$

et lorsque $R \leq x$, il s'écrit

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{x} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{x^3}$$

Pour l'énergie électrostatique W , vu l'expression (2.14), il vient

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dV(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^R 4\pi x^2 dx q_0 \cos(kx) \frac{q_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{k^2} \left[\cos(kR) + \cos(kx) - 2 \frac{\sin(kx)}{kx} \right] \\ &= \frac{2\pi q_0^2}{\varepsilon_0 k^5} \int_0^{kR} u^2 du \cos u \left[\cos(kR) + \cos u - 2 \frac{\sin u}{u} \right] \end{aligned}$$

La dernière égalité procède du changement de variable d'intégration de x en $u = kx$. Finalement, toutes intégrations effectuées,

$$\begin{aligned} W &= \frac{2\pi q_0^2}{\varepsilon_0 k^5} \left[\cos(kR) (u^2 - 1) \sin u + 2u \cos u \right] \\ &+ \left(\frac{u^2}{2} - \frac{3}{4} \right) \sin u \cos u + \frac{3u}{2} (\cos u)^2 + \frac{u^3}{6} - \frac{3u}{4} \Big|_0^{kR} \\ &= \frac{2\pi q_0^2}{\varepsilon_0 k^5} \left[\frac{6(kR)^2 - 7}{8} \sin(2kR) + \frac{7kR}{4} \cos(2kR) + \frac{(kR)^3 + 3kR}{3} \right] \end{aligned}$$

Finalement, puisque $kR = n\pi$ il vient,

$$W = \frac{2\pi q_0^2}{\varepsilon_0 k^5} \left[\frac{(n\pi)^3}{3} + \frac{11n\pi}{4} \right] = \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{R} \left[\frac{(n\pi)^2}{24} + \frac{11}{32} \right]$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$ le potentiel $\Phi(\mathbf{x})$, le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ et l'énergie totale W tendent vers zéro.

Exercice 2.3

Déterminer le potentiel électrostatique et le champ électrique sur l'axe x^3 pour la distribution superficielle de charge électrique dans le plan $x^3 = 0$ donnée par :

$$\omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} \omega & \text{si } x^2 \geq 0 \text{ et } \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \leq R \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Discuter les propriétés du champ électrique dans le plan $x^3 = 0$ et en particulier à l'origine.

Ensuite traiter le même problème pour la distribution superficielle de charge électrique qui suit

$$\omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} \omega x^2/R & \text{si } x^2 \geq 0 \text{ et } \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \leq R \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Quelles sont les différences qualitatives entre ces deux situations ? Quelle est la nature des singularités en $x^3 = 0$?

Solution :

On se place en coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) . Pour la distribution de charge électrique de densité superficielle ω constante, la valeur du potentiel électrostatique sur l'axe Ox^3 est donnée par l'intégrale,

$$\begin{aligned} \Phi(0, 0, z) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^R dr \int_0^\pi r d\phi \frac{\omega}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\omega}{4 \varepsilon_0} \int_0^R dr \frac{r}{\sqrt{z^2 + r^2}} \\ &= \frac{\omega}{4 \varepsilon_0} \sqrt{z^2 + r^2} \Big|_0^R = \frac{\omega}{4 \varepsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - |z|) \end{aligned}$$

et le champ électrique sur le même axe a pour expression,

$$\begin{aligned} E_1(0, 0, z) &= \frac{\omega}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^R dr \int_0^\pi r d\phi \frac{-r \cos \phi}{(\sqrt{z^2 + r^2})^3} = 0 \\ E_2(0, 0, z) &= \frac{\omega}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^R dr \int_0^\pi r d\phi \frac{-r \sin \phi}{(\sqrt{z^2 + r^2})^3} = \frac{-\omega}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^R r dr \frac{2r}{(\sqrt{z^2 + r^2})^3} \\ E_3(0, 0, z) &= \frac{\omega}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^R dr \int_0^\pi r d\phi \frac{z}{(\sqrt{z^2 + r^2})^3} = \frac{\omega}{4 \varepsilon_0} \int_0^R r dr \frac{z}{(\sqrt{z^2 + r^2})^3} \end{aligned}$$

Finalement l'intégration radiale étant effectuée.

$$\begin{aligned} E_1(0, 0, z) &= 0 \\ E_2(0, 0, z) &= \frac{-\omega}{2\pi \varepsilon_0} \left(\arg \sinh \left(\frac{R}{|z|} \right) - \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \\ E_3(0, 0, z) &= \frac{\omega}{4 \varepsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \end{aligned}$$

Pour la densité superficielle en $\omega x^2/R = \omega r \sin \phi/R$ le potentiel électrostatique sur l'axe Ox^3 s'écrit

$$\begin{aligned} \Phi(0, 0, z) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^R dr \int_0^\pi r d\phi \frac{\omega r \sin \phi/R}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\omega}{4 \varepsilon_0} \frac{2}{R} \int_0^R dr \frac{r^2}{\sqrt{z^2 + r^2}} \\ &= \frac{\omega}{4 \varepsilon_0} \frac{1}{R} \left(r\sqrt{z^2 + r^2} - z^2 \arg \sinh \left(\frac{r}{|z|} \right) \right) \Big|_0^R \\ &= \frac{\omega}{4 \varepsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - \frac{z^2}{R} \arg \sinh \left(\frac{R}{|z|} \right) \right) \end{aligned}$$

et le champ électrique correspondant sur le même axe a pour expression,

$$\begin{aligned}
 E_1(0, 0, z) &= \frac{\omega}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^R dr \int_0^\pi r d\phi \frac{r \sin \phi}{R} \frac{-r \cos \phi}{(\sqrt{z^2 + r^2})^3} = 0 \\
 E_2(0, 0, z) &= \frac{\omega}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^R dr \int_0^\pi r d\phi \frac{r \sin \phi}{R} \frac{-r \sin \phi}{(\sqrt{z^2 + r^2})^3} \\
 &= \frac{\omega}{4 \varepsilon_0} \frac{-\pi}{2 R} \int_0^R r dr \frac{r^2}{(\sqrt{z^2 + r^2})^3} \\
 E_3(0, 0, z) &= \frac{\omega}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^R dr \int_0^\pi r d\phi \frac{r \sin \phi}{R} \frac{z}{(\sqrt{z^2 + r^2})^3} \\
 &= \frac{\omega}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{2 R} \int_0^R r dr \frac{z}{(\sqrt{z^2 + r^2})^3}
 \end{aligned}$$

Finalement l'intégration radiale étant effectuée,

$$\begin{aligned}
 E_1(0, 0, z) &= 0 \\
 E_2(0, 0, z) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{-\pi \omega}{2 R} \left[\frac{R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} + 2 \left(\frac{z^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - |z| \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{-\pi \omega}{2 R} \left[\frac{-R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} + 2 \left(\sqrt{z^2 + R^2} - |z| \right) \right] \\
 E_3(0, 0, z) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{2 \omega z}{R} \left[\frac{-R}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \arg \sinh \left(\frac{R}{|z|} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Pour ce qui concerne le comportement du champ électrique au voisinage de l'origine (0, 0, 0) on parvient aux résultats suivants :

Dans le premier cas évoqué ci-dessus :

$E_3(0, 0, z)$ est impaire et présente un saut $\omega/2\varepsilon_0$ en $z = 0$.

$E_2(0, 0, z)$ est paire et diverge logarithmiquement en $z = 0$.

Dans le second cas :

$E_3(0, 0, z)$ est impaire et continue en $z = 0$.

$E_2(0, 0, z)$ est paire et continue en $z = 0$ et passe par la valeur $-\omega/(8 \varepsilon_0 R)$.

Exercice 2.4

Déterminer les moments dipolaires et quadripolaires électriques de la distribution de charges électriques ponctuelles décrite par la figure 2.1

Interpréter les résultats.

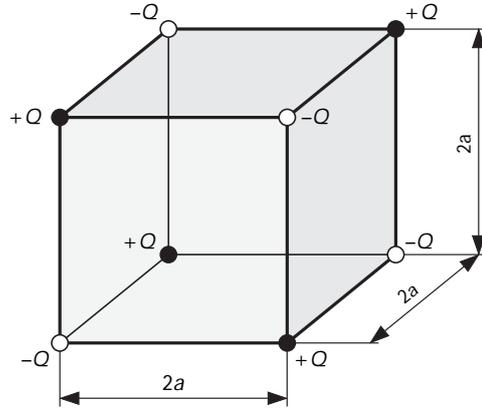


FIGURE 2.1 – Distribution de charges électriques ponctuelles. Les sommets d'un cube de côté $2a$ sont occupés par des charges ponctuelles de valeurs opposées, toutes de mêmes valeurs absolues, de telle manière que deux voisins selon les arêtes sont de valeurs opposées.

Solution :

Le centre du cube tient lieu d'origine du système de coordonnées et les axes correspondants sont parallèles aux cotés du cube de telle façon que le point de coordonnées $(+a, +a, +a)$ est occupé par une charge électrique de valeur Q . Par conséquent, selon (2.34)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &= Q (+a, +a, +a) - Q (-a, -a, -a) \\
 &+ Q (-a, -a, +a) - Q (+a, +a, -a) \\
 &+ Q (-a, +a, -a) - Q (+a, -a, +a) \\
 &+ Q (+a, -a, -a) - Q (-a, +a, +a) = (0, 0, 0)
 \end{aligned}$$

Par conséquent le moment dipolaire électrique \mathbf{p} est nul.

Pour les composantes du moment quadripolaire électrique

$$\begin{aligned}
 Q_{12} &= Q a^2 - Q a^2 \\
 &+ Q (-a)^2 - Q (-a)^2 \\
 &+ Q (-a^2) - Q (-a^2) \\
 &+ Q (-a^2) - Q (-a^2) = 0
 \end{aligned}$$

Similairement, par raison de symétrie $Q_{23} = Q_{31} = 0$.

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= Q (3 (+a)^2 - 3 a^2) - Q (3 (-a)^2 - 3 a^2) \\
 &+ Q (3 (-a)^2 - 3 a^2) - Q (3 (+a)^2 - 3 a^2) \\
 &+ Q (3 (+a)^2 - 3 a^2) - Q (3 (-a)^2 - 3 a^2) \\
 &+ Q (3 (-a)^2 - 3 a^2) - Q (3 (+a)^2 - 3 a^2) = 0
 \end{aligned}$$

Similairement, par raison de symétrie $Q_{22} = Q_{33} = 0$.

Toutes les composantes du moment quadripolaire électrique sont nulles.

Exercice 2.5

On considère un segment de droite uniformément chargé de longueur $2a$ et de charge électrique totale Q . Dans ces conditions la densité de charge électrique est donnée par le rapport $Q/2a$. Ce segment de droite occupe l'intervalle $[-a, +a]$ de l'axe Ox^3 . On demande de calculer le potentiel électrostatique produit par cette distribution de charge électrique. En déduire les composantes du moment dipolaire électrique et quadripolaire électrique par rapport à l'origine à partir du comportement asymptotique du potentiel électrostatique.

Solution :

On commence par introduire la distance radiale,

$$\rho = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$$

Lorsque $\rho \neq 0$, l'expression du potentiel électrostatique associé au segment de droite uniformément chargé est donné par l'expression,

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_{-a}^a \frac{Q}{2a} \frac{ds}{\|\mathbf{x} - se_3\|} \\ &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int_{-a}^a \frac{Q}{2a} \frac{ds}{\sqrt{\rho^2 + (x^3 - s)^2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{2a} \arg \sinh \frac{s - x^3}{\rho} \Big|_{s=-a}^a \end{aligned}$$

Finalement

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{2a} \left[\arg \sinh \left(\frac{a - x^3}{\rho} \right) + \arg \sinh \left(\frac{a + x^3}{\rho} \right) \right]$$

Par contre, lorsque $\rho = 0$, ce potentiel adopte le comportement donné par l'expression,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{|x^3| + a}{|x^3| - a} \right) \quad , \quad \text{si } |x^3| > a.$$

Autrement, c'est-à-dire lorsque $\rho = 0$ et $|x^3| \leq a$ le potentiel électrostatique $\Phi(\mathbf{x})$ diverge. A grande distance, c'est dire à une distance très supérieure à la longueur du segment chargé, le potentiel créé peut être approché à l'aide des premiers termes du développement du potentiel en puissances de la demi-longueur a . Les premiers termes de ce développement s'écrivent,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \left[\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{a^2}{3!} \frac{\rho^2 - 2(x^3)^2}{\|\mathbf{x}\|^5} + O(a^4) \right].$$

Par conséquent, pour le segment uniformément chargé, le moment dipolaire électrique p_k , $k = 1, 2, 3$ par rapport au point central du segment est nul. Quant aux composantes du moment quadripolaire électrique elles prennent les valeurs,

$$Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{3} Q a^2, \quad Q_{33} = \frac{2}{3} Q a^2 \quad \text{et} \quad Q_{12} = Q_{23} = Q_{31} = 0$$

Exercice 2.6

Etudier le champ **grad** $F(\mathbf{x})$ lorsque $F(\mathbf{x}) = x^1 x^2 x^3$. Déterminer les lignes de champ correspondantes.

Solution :

$$\mathbf{grad} F(\mathbf{x}) = (x^2 x^3, x^1 x^3, x^1 x^2)$$

Soit $\mathbf{x}(s)$, $s \in \mathbb{R}$ l'expression paramétrique d'une ligne de champ. Par conséquent

$$\mathbf{grad} F(\mathbf{x}(s)) \wedge \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = 0$$

autrement dit

$$\begin{aligned} x^2(s) x^3(s) \frac{dx^2(s)}{ds} - x^3(s) x^1(s) \frac{dx^1(s)}{ds} &= 0 \\ x^1(s) x^2(s) \frac{dx^1(s)}{ds} - x^2(s) x^3(s) \frac{dx^3(s)}{ds} &= 0 \\ x^3(s) x^1(s) \frac{dx^3(s)}{ds} - x^1(s) x^2(s) \frac{dx^2(s)}{ds} &= 0 \end{aligned}$$

ou encore

$$x^1(s) \frac{dx^1(s)}{ds} = x^2(s) \frac{dx^2(s)}{ds} = x^3(s) \frac{dx^3(s)}{ds}$$

Dans ces conditions, pour autant que les fonctions $x^1(s)$, $x^2(s)$ et $x^3(s)$ ne sont pas identiquement nulle

$$x^2(s)^2 = x^1(s)^2 - (x_0^1)^2 + (x_0^2)^2 \quad \text{et} \quad x^3(s)^2 = x^1(s)^2 - (x_0^1)^2 + (x_0^3)^2$$

Ce n'est pas une courbe plane dans le cas général.

Exercice 2.7

Vérification du théorème du rotationnel (2.49) dans le cas particulier où le champ de vecteurs $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ est de la forme

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \quad : \quad V^1(\mathbf{x}) = (x^2)^n \quad , \quad V^2(\mathbf{x}) = (x^1)^n \quad , \quad V^3(\mathbf{x}) = (x^3)^n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

et où la surface S est la partie du parabolôide de révolution

$$S \quad : \quad x^3 = \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2}{a} \leq a > 0$$

Solution :

Il est commode d'utiliser les coordonnées cylindriques

$$x^1 = \rho \cos \phi \quad , \quad x^2 = \rho \sin \phi \quad , \quad x^3 = z$$

Dans ces conditions, il suit de la définition (2.47) que

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{V}(\mathbf{x}) &= \left(0, 0, n \left((x^1)^{n-1} - (x^2)^{n-1} \right) \right) \\ &= \left(0, 0, n \rho^{n-1} \left((\cos \phi)^{n-1} - (\sin \phi)^{n-1} \right) \right) \end{aligned}$$

Au point $\mathbf{x} \in S$ de coordonnées cylindriques $(\rho, \phi, z = \rho^2/a)$, les composantes de l'élément de surface associé à la surface S sont

$$\begin{aligned} d\check{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) &= \frac{\sqrt{4\rho^2 + a^2}}{a} \rho \, d\rho \, d\phi \\ &\times \left(-\frac{2\rho}{\sqrt{4\rho^2 + a^2}} \cos \phi \quad , \quad -\frac{2\rho}{\sqrt{4\rho^2 + a^2}} \sin \phi \quad , \quad \frac{a}{\sqrt{4\rho^2 + a^2}} \right) \\ &= \left(-2 \frac{\rho}{a} \cos \phi \quad , \quad -2 \frac{\rho}{a} \sin \phi \quad , \quad 1 \right) \rho \, d\rho \, d\phi \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\check{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \int_0^a \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \, n \rho^{n-1} \left((\cos \phi)^{n-1} - (\sin \phi)^{n-1} \right) = 0$$

Par ailleurs, sur le bord ∂S ,

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \left(a^n (\sin \phi)^n \quad , \quad a^n (\cos \phi)^n \quad , \quad a^{2n} \right)$$

et

$$d\mathbf{x} = \left(-\sin \phi \quad , \quad \cos \phi \quad , \quad 0 \right) a \, d\phi$$

d'où

$$\int_{\partial S} \check{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} a^{n+1} (-(\sin \phi)^{n+1} + (\cos \phi)^{n+1}) a d\phi = 0$$

Exercice 2.8

Trouver un champ de vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ dont le rotationnel est un champ uniforme $\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \check{\mathbf{B}}_0, \forall \mathbf{x}$

$$\check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \check{\mathbf{B}}_0, \quad \forall \mathbf{x}$$

Solution :

A l'aide de la formule (2.73) vérifier que

$$\check{\mathbf{rot}} (\check{\mathbf{B}}_0 \wedge \mathbf{x}) = \check{\mathbf{B}}_0 \operatorname{div}(\mathbf{x}) - (\check{\mathbf{B}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{x} = 3 \check{\mathbf{B}}_0 - \check{B}_0^j \mathbf{e}_j = 2 \check{\mathbf{B}}_0$$

Par conséquent

$$\check{\mathbf{rot}} \left(\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \check{\mathbf{B}}_0 \wedge \mathbf{x} \right) = 0$$

et vu le résultat (2.67) nous pouvons en conclure que la forme la plus générale du champ de vecteurs $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ s'écrit

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \check{\mathbf{B}}_0 \wedge \mathbf{x} + \mathbf{grad} F(\mathbf{x})$$

où F désigne une fonction dérivable arbitraire.

Exercice 2.9

Vérification du théorème de la divergence (2.57) dans le cas particulier dans lequel le champ de vecteurs $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ est de la forme

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \quad : \quad V^1(\mathbf{x}) = (x^2)^n, \quad V^2(\mathbf{x}) = (x^1)^n, \quad V^3(\mathbf{x}) = (x^3)^n$$

et lorsque la surface Γ est le bord de la boule fermée de rayon R centrée à l'origine.

Solution :

Il convient ici d'utiliser les coordonnées sphériques

$$x^1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x^3 = r \cos \theta$$

Dans ces conditions

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{x}) = n (x^3)^{n-1} = n r^{n-1} (\cos \theta)^{n-1}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) &= \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi n r^{n-1} (\cos \theta)^{n-1} \\ &= \frac{2\pi n R^{n+2}}{n+2} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta (\cos \theta)^{n-1} = \frac{R^{n+2}}{n+2} \begin{cases} 4\pi & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \end{aligned}$$

Par ailleurs au point $\mathbf{x} \in S$ de coordonnées sphériques (R, θ, ϕ) , l'élément de surface sur le bord de la boule de rayon R s'écrit

$$d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \left(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta \right)$$

Quant aux composantes du champ de vecteurs $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ au même point elles ont pour expressions

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = R^n \left((\sin \theta \sin \phi)^n, (\sin \theta \cos \phi)^n, (\cos \theta)^n \right)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Gamma} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \int_0^{\pi} R \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} R d\phi \\ &\times R^n \left[(\sin \theta)^{n+1} \left((\sin \phi)^n \cos \phi + (\cos \phi)^n \sin \phi \right) + (\cos \theta)^{n+1} \right] \\ &= 2\pi R^{n+2} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta (\cos \theta)^{n+1} = 2\pi R^{n+2} \begin{cases} 2/(n+2) & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 2.10

Quelles sont les propriétés du champ des vitesses de l'écoulement d'un fluide incompressible ?

Solution :

Un fluide satisfait l'équation de continuité (de conservation de la masse)

$$\operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{où} \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

dans laquelle le symbole $\rho(\mathbf{x}, t)$ désigne la densité de masse du fluide au point \mathbf{x} à l'instant t . Lorsque le fluide est incompressible cette densité est constante dans l'espace et au cours du temps. Autrement dit $\rho(\mathbf{x}, t) \equiv \rho_0$ et par conséquent il découle de l'équation de continuité qui précède que

$$\operatorname{div} (\rho_0 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad \text{c'est-à-dire que} \quad \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0$$

Exercice 2.11

Vérifier l'exactitude des relations (2.60) à (2.63)

Solution :

D'après (2.47) puis (2.39)

$$\mathring{\text{rot}} \mathbf{grad} F(\mathbf{x}) = \sum_{i, j, k=1}^3 \mathbf{e}_i \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x^k} = 0$$

D'après (2.56) puis (2.47)

$$\text{div} \mathring{\text{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \sum_{j, k=1}^3 \varepsilon^{ijk} \frac{\partial A_k(\mathbf{x})}{\partial x^j} = \sum_{i, j, k=1}^3 \varepsilon^{ijk} \frac{\partial A^k(\mathbf{x})}{\partial^2 x^i \partial x^j} = 0$$

D'après (2.47)

$$\begin{aligned} \mathring{\text{rot}} \mathring{\text{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \sum_{i, j, k=1}^3 \mathbf{e}_i \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \sum_{\ell=1}^3 g_{k\ell} \sum_{m, n=1}^3 \varepsilon^{\ell, m, n} \frac{\partial A_n(\mathbf{x})}{\partial x^m} \\ &= \sum_{i, j=1}^3 \sum_{m, n=1}^3 \mathbf{e}_i (g^{im} g^{jn} - g^{in} g^{jm}) \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial A_n(\mathbf{x})}{\partial x^m} \\ &= \sum_{i, m=1}^3 \mathbf{e}_i g^{im} \frac{\partial}{\partial x^m} \sum_{j, n=1}^3 g^{jn} \frac{\partial A_n(\mathbf{x})}{\partial x^j} - \sum_{i, n=1}^3 \mathbf{e}_i g^{in} \sum_{j, m=1}^3 g^{jm} \frac{\partial^2 A_n(\mathbf{x})}{\partial x^j \partial x^m} \\ &= \mathbf{grad} \text{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

La seconde égalité découle du fait que

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon^{ijk} \sum_{\ell=1}^3 g_{k\ell} \varepsilon^{\ell, m, n} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j, m = i \text{ et } n = j \\ -1 & \text{si } i \neq j, n = i \text{ et } m = j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

autrement dit du fait que

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon^{ijk} \sum_{\ell=1}^3 g_{k\ell} \varepsilon^{\ell, m, n} = g^{im} g^{jn} - g^{in} g^{jm}$$

et la dernière suit des définitions (2.39), (2.56), (2.64) et (2.65).

Finalement, d'après (2.56) puis (2.39)

$$\text{div} \mathbf{grad} F(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} \sum_{j=1}^3 g^{kj} \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 F(\mathbf{x})}{(\partial x^k)^2}$$

Exercice 2.12

Etablir les relations (2.70) à (2.75)

Solution :

Allègement de l'écriture par omission de la variable \mathbf{x} .

Partant du membre de gauche de (2.70) et compte tenu de la définition (2.39) il vient,

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}(FG) &= \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_i g^{ij} \frac{\partial FG}{\partial x^j} = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_i g^{ij} \left(\frac{\partial F}{\partial x^j} G + F \frac{\partial G}{\partial x^j} \right) \\ &= (\mathbf{grad} F) G + F (\mathbf{grad} G) \end{aligned}$$

Partant du membre de gauche de (2.71) et compte tenu de la définition (2.39) il vient,

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{e}_i g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \sum_{k,\ell=1}^3 g_{k\ell} A^k B^\ell \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \sum_{k,\ell=1}^3 \mathbf{e}_i g^{ij} g^{k\ell} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^j} B_\ell + A_k \frac{\partial B_\ell}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \sum_{k,\ell=1}^3 \mathbf{e}_i g^{ij} g^{k\ell} \left(\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \right) B_\ell + A_k \left(\frac{\partial B_\ell}{\partial x^j} - \frac{\partial B_j}{\partial x^\ell} \right) \right) \\ &+ \sum_{i,j=1}^3 \sum_{k,\ell=1}^3 \mathbf{e}_i g^{ij} g^{k\ell} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^k} B_\ell + A_k \frac{\partial B_j}{\partial x^\ell} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \sum_{k,\ell=1}^3 \mathbf{e}_i g^{ij} \sum_{m=1}^3 \left((\mathbf{rot} \mathbf{A})^m \varepsilon_{mjk} B^k + A^\ell (\mathbf{rot} \mathbf{B})^m \varepsilon_{mj\ell} \right) \\ &+ \sum_{k,\ell=1}^3 g^{k\ell} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^k} B_\ell + A_k \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x^\ell} \right) \\ &= \mathbf{A} \wedge (\mathbf{rot} \mathbf{B}) - (\mathbf{rot} \mathbf{A}) \wedge \mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} \end{aligned}$$

Partant du membre de gauche de (2.72) et compte tenu de la définition (2.47) il vient,

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}(F \mathbf{A}) &= \sum_{i,j,k} \mathbf{e}_i \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} (F A_k) \\ &= F \sum_{i,j,k} \mathbf{e}_i \varepsilon^{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x^j} + \sum_{i,j,k} \mathbf{e}_i \varepsilon^{ijk} \frac{\partial F}{\partial x^j} A_k \\ &= F \mathbf{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{grad} F) \wedge \mathbf{A} \end{aligned}$$

Partant du membre de gauche de (2.73) et compte tenu de la définition (2.47) il vient,

$$\begin{aligned}
\check{\text{rot}}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) &= \sum_{i,j,k=1}^3 \mathbf{e}_i \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} \sum_{\ell m=1}^3 \varepsilon_{k\ell m} A^\ell B^m \\
&= \sum_{i,j=1}^3 \sum_{\ell m=1}^3 \mathbf{e}_i (\delta_\ell^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_\ell^j) \frac{\partial}{\partial x^j} (A^\ell B^m) \\
&= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} (\mathbf{A} B^j - A^j \mathbf{B}) \\
&= \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^j} B^j + \frac{\partial B^j}{\partial x^j} \mathbf{A} - A^j \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^j} \mathbf{B} \right) \\
&= \mathbf{A} (\text{div } \mathbf{B}) - (\text{div } \mathbf{A}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}
\end{aligned}$$

Partant du membre de gauche de (2.74) et compte tenu de la définition (2.56) il vient,

$$\begin{aligned}
\text{div}(F \mathbf{A}) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} (F A^i) \\
&= F \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x^i} A^i \\
&= F \text{div } \mathbf{A} + (\text{grad } F) \cdot \mathbf{A}
\end{aligned}$$

Partant du membre de gauche de (2.75) et compte tenu de la définition (2.56) il vient,

$$\begin{aligned}
\text{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) &= \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} (\varepsilon^{ijk} A_j B_k) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon^{ijk} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} B_k + A_j \frac{\partial B_k}{\partial x^i} \right) \\
&= \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i,j=1}^3 \varepsilon^{kij} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right) B_k - \sum_{j=1}^3 A_j \left(\sum_{i,k=1}^3 \varepsilon^{jik} \frac{\partial B_k}{\partial x^i} \right) \\
&= (\check{\text{rot}} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\check{\text{rot}} \mathbf{B})
\end{aligned}$$

Exercice 2.13

Quelle est la forme générale d'un champ de vecteurs $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ irrotationnel à flux conservatif?

Solution :

Par hypothèse

$$\mathbf{rot} \mathbf{V}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathit{div} \mathbf{V}(\mathbf{x}) = 0$$

De la première condition il résulte que le champ de vecteurs $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ dérive d'un gradient en vertu du résultat (2.67). Autrement dit, il existe une fonction F telle que

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{grad} F(\mathbf{x})$$

et par conséquent il suit de la seconde condition que

$$\mathit{div} \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \Delta F(\mathbf{x}) = 0$$

Tout champ de vecteurs irrotationnel à flux conservatif est le gradient d'une fonction dont le laplacien est identiquement nul.

Exercice 2.14

On considère une sphère de rayon R chargée uniformément, de charge électrique superficielle totale Q . Calculer l'énergie électrostatique totale de cette configuration de trois manières différentes.

1. A partir de la densité d'énergie $u_e(\mathbf{x}, \mathbf{D}(\mathbf{x}))$.
2. A partir de l'énergie de liaison des éléments de charge électrique $\omega(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x})$.
3. A partir des forces qui s'exercent sur la sphère, autrement dit en évaluant le travail qu'il faut fournir pour constituer une sphère de rayon R à partir d'une sphère de rayon infini.

Solution :

1.

$$u_e(\mathbf{D}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2 \varepsilon_0} \mathbf{D}(\mathbf{x})^2 = \frac{1}{2 \varepsilon_0} \left(\frac{Q}{\|\mathbf{x}\|^2} \right)^2$$

$$W = \int_{\mathbb{R}^3} dV(\mathbf{x}) u_e(\mathbf{D}(\mathbf{x})) = \int_R^{+\infty} 4\pi r^2 dr \frac{1}{2 \varepsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \right)^2 = \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0} \frac{1}{R}$$

2.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi \varepsilon_0} \int_S d\sigma(\mathbf{x}) \int_S d\sigma(\mathbf{y}) \frac{\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \\ &= \frac{1}{8\pi \varepsilon_0} \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &\times \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{2 R^2 - 2R^2 (\sin \theta \sin \theta \cos(\phi - \phi) + \cos \theta \cos \theta)}} \\ &= \end{aligned}$$

3.

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \quad \text{donc} \quad f_r = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi r^2} \quad E_r(r) = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \int_{\infty}^R dr 4\pi r^2 \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \\
&= \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_0} \frac{1}{R}
\end{aligned}$$

Exercice 2.15★

On considère une plaque métallique plane et infinie et une grille également plane et infinie parallèle à la plaque précédente et située à une distance a . On impose entre ces deux conducteurs une différence de potentiel $\Phi(a) - \Phi(0) = U$.

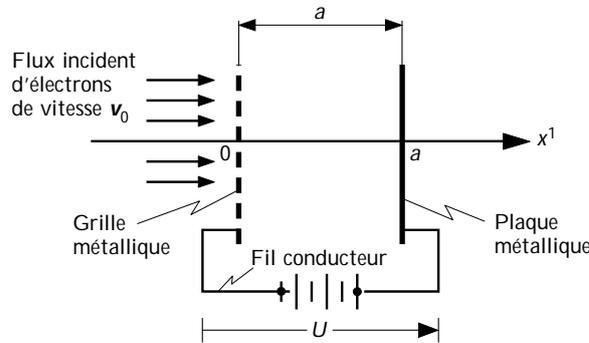


FIGURE 2.2 – Un faisceau d'électrons de densité de courant j_0 est formé d'électrons animés d'une vitesse initial v_0 . Ces électrons franchissent une grille métallique séparée d'une plaque métallique (anode) par une distance a . Une tension U est appliquée entre la grille et la plaque conductrice.

Un courant d'électrons (masse m charge e) traverse la grille selon l'axe x^1 avec une densité de courant j_0 donnée et une vitesse v_0 au point $x^1 = 0$ donnée. En dehors de la région $x \in [0, a]$ on supposera que le milieu est électriquement neutre.

1. Exprimer la densité de charge électrique $q(\mathbf{x})$ en fonction du potentiel $\Phi(\mathbf{x})$. En déduire une équation différentielle du 2ème ordre pour le potentiel $\Phi(\mathbf{x})$ puis, par intégration, une équation 1er ordre. Déterminer les solutions de cette dernière équation.
2. Déterminer les équations imposées par les conditions aux limites que doivent satisfaire les constantes d'intégration. La résolution de ces équations est particulièrement laborieuse. Aussi demande-t-on de choisir une situation à la fois physiquement intéressante dans laquelle ces équations sont à la fois aisées à résoudre. Discuter le contenu physique du résultat.
3. Les électrons atteignent-ils toujours la plaque métallique? Sinon pour quelle distance a l'atteignent-ils?

Solution :

La somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentiel de chaque électron est conservée de même que la densité de courant électrique. En d'autres termes

$$\frac{m v(x)^2}{2} + e \Phi(x) = \frac{m v_0^2}{2} \quad (1) \quad \text{et} \quad q(x) v(x) = j_0 \quad (2)$$

Par ailleurs on dispose de l'équation de Poisson (unidimensionnelle)

$$\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = -\frac{q(x)}{\varepsilon_0} \quad (3)$$

qui lie la densité de charge $q(x)$ et le potentiel $\Phi(x)$. Posons

$$\Phi_0 = \frac{m v_0^2}{2 e} \quad \text{et} \quad q_0 = \frac{j_0}{v_0}$$

Il suit de l'équation (1) puis de l'équation (2) que

$$\frac{v(x)}{v_0} = \sqrt{1 - \frac{\Phi(x)}{\Phi_0}} \quad \text{puis} \quad \frac{q(x)}{q_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Phi(x)}{\Phi_0}}}$$

Compte tenu de la dernière de ces relations, l'équation de Poisson prend maintenant la forme,

$$\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = -\frac{q_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Phi(x)}{\Phi_0}}} \quad (4)$$

Il est aisé de constater que cette dernière équation différentielle du second ordre dérive de l'équation différentielle du premier ordre

$$\left(\frac{d\Phi(x)}{dx} \right)^2 = \frac{4 q_0 \Phi_0}{\varepsilon_0} \left(\sqrt{1 - \frac{\Phi(x)}{\Phi_0}} - A \right) \quad (5)$$

Dans cette équation le symbole A désigne une constante d'intégration dont la valeur est à déterminer.

Les premières conséquences des équations (4) et (5) sont les suivantes. De l'équation (4) il découle que $d^2 \Phi(x)/dx^2 \geq 0$ puisque la densité de charge q_0 est négative. Par conséquent la dérivée $d\Phi(x)/dx$ est une fonction croissante dans l'intervalle $[0, a]$. En outre, il découle de cette équation que

$$\Phi(x) \geq \Phi_0$$

Enfin, de l'équation (5), il découle de plus que

$$\sqrt{1 - \frac{\Phi(x)}{\Phi_0}} \geq A$$

puisque $q_0 \Phi_0 \geq 0$. Pour intégrer l'équation différentielle (5) il est commode d'introduire la fonction $u(x)$ telle que

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi_0} = 1 - (A + u(x))^2 \quad (6)$$

Par conséquent,

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = -4 \Phi_0 (A + u(x)^2) u(x) \frac{du(x)}{dx} \quad (7)$$

Après remplacement et réduction l'équation (5) prend alors la forme

$$(A + u(x)^2)^2 \left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 = \frac{q_0}{4 \varepsilon_0 \Phi_0} \quad (8)$$

Cette équation différentielle est aisée à intégrer. Au signe près, le signe étant indifférent, par choix nous avons

$$A u(x) + \frac{u(x)^3}{3} = k x + C, \quad \text{où } k = \sqrt{\frac{q_0}{4 \varepsilon_0 \Phi_0}} \quad (9)$$

Le symbole C désigne une constante d'intégration. Les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = a$ implique

$$\Phi(0) = 0 \Rightarrow u(0) = -\sqrt{1-A}$$

et

$$\Phi(a) = U \Rightarrow u(a) = +\sqrt{\sqrt{1-\frac{U}{\Phi_0}} - A} \quad \text{où il faut que } U \geq \Phi_0$$

Par conséquent, les constantes d'intégration A et C sont déterminées par les équations

$$C = -\frac{1+2A}{3} \sqrt{1-A} \quad (10)$$

et

$$k a + C = \frac{1+2A}{3} \sqrt{\sqrt{1-\frac{U}{\Phi_0}} - A} \quad (11)$$

Dégageons la forme du champ électrique et celle de la densité de charge électrique. Vu l'équation (7) et (8)

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = -4\Phi_0 (A + u(x)^2) u(x) \frac{du(x)}{dx} = -4 \sqrt{\frac{q_0 \Phi_0}{4 \varepsilon_0}} u(x)$$

Donc le champ électrique $E(x)$ est proportionnel à la fonction $u(x)$. Ensuite

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = -4 \sqrt{\frac{q_0 \Phi_0}{4 \varepsilon_0}} \frac{du(x)}{dx} = -\frac{q_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{A + u(x)^2}$$

et par conséquent, vu l'équation (3), la densité de charge électrique est donnée par l'expression

$$q(x) = \frac{q_0}{A + u(x)^2}$$

Particularisons la situation à une situation aisément traitable sur le plan formel et toutefois intéressante quant aux aspects physiques. Commençons par une remarque préalable. Supposons que la fonction $u(x)$ s'annule en x_0 avec $0 \leq x_0 \leq a$. Par conséquent le champ électrique s'annule en x_0 . Une charge électronique d'espace est centrée en x_0 et crée un champ électrique qui freine les électrons incidents. Si cette charge d'espace augmente les électrons n'atteignent plus la plaque (l'anode).

Au lieu de déterminer les constantes d'intégration A et C en fonction de la tension U à l'aide des équations (10) et (11) imposons la valeur $A = 0$ à la constante d'intégration A puis déterminons la tension U correspondante. De l'équation (10) puis de l'équation (11) il découle alors que

$$C = -\frac{1}{3} \quad \text{puis} \quad U = \Phi_0 [1 - (3ka - 1)^4]$$

Dans ces conditions $x_0 = 1/(3k)$ et $x_0 \leq a$ implique que $ka \geq 1/3$. Par conséquent $\Phi_0 \leq U$. Finalement

$$U = \Phi_0 \left[1 - \left(\frac{a - x_0}{x_0} \right)^4 \right] \quad \text{où} \quad 0 \leq x_0 \leq a$$

Exercice 2.16

On considère une sphère conductrice de rayon R centrée à l'origine et une charge ponctuelle Q située en \mathbf{x}_0 , $\|\mathbf{x}_0\| > R$. Quel est le potentiel $\Phi(\mathbf{x})$ associé à cette sphère lorsque la charge électrique totale Q_0 de la sphère est nulle ?

Ensuite considérer la situation limite où \mathbf{x}_0 tend vers l'infini dans la direction fixée par le vecteur $-\mathbf{u}$ de manière que $\mathbf{x}_0 = -\|\mathbf{x}_0\| \mathbf{u}$, la charge Q croissant simultanément comme

$$Q = 4\pi \varepsilon_0 \|\mathbf{x}_0\|^2 E_\infty$$

la grandeur E_∞ étant une constante. Trouver un potentiel décrivant cette situation limite et donner une interprétation physique de cette dernière. On se souviendra qu'un potentiel est fixé à une constante additive près.

Solution :

Il est commode de poser $x = \|\mathbf{x}\|$ et $x_0 = \|\mathbf{x}_0\|$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} - \frac{R}{x_0} \frac{1}{\|\mathbf{x} - (\frac{R}{x_0})^2 \mathbf{x}_0\|} + \frac{R}{x_0} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \right]$$

Lorsque \mathbf{x}_0 tend vers l'infini dans la direction opposée à celle fixée par le vecteur unité \mathbf{u} alors

$$\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \frac{1}{x_0} \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{x_0} + O(x_0^{-2}) \right)$$

et

$$\frac{1}{\|\mathbf{x} - (\frac{R}{x_0})^2 \mathbf{x}_0\|} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{R^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{x_0 \|\mathbf{x}\|^2} + O(x_0^{-2}) \right)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0} \left[\frac{1}{x_0} \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{x_0} + O(x_0^{-2}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{R}{x_0} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{R^2}{x_0} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} + O(x_0^{-2}) \right) + \frac{R}{x_0} \frac{1}{x} \right] \\ &= \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0} \left[\frac{1}{x_0} \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{x_0} \right) + \frac{R^3}{x_0^2} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} + O(x_0^{-3}) \right]\end{aligned}$$

Ensuite, compte tenu de la dépendance de la charge électrique Q par rapport à la distance x_0 , il vient,

$$\Phi(\mathbf{x}) = x_0 E_\infty - E_\infty \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} + E_\infty R^3 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} + O(x_0^{-1})$$

Lorsque $x_0 \rightarrow \infty$ ce potentiel tend, à une constante près, vers le potentiel associé à un champ électrique uniforme $\mathbf{E}_\infty = E_\infty \mathbf{u}$ auquel vient s'ajouter le potentiel associé à un dipôle électrique $\mathbf{p} = 4 \pi \varepsilon_0 R^3 \mathbf{E}_\infty$ centré à l'origine. Autrement dit,

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} \Phi(\mathbf{x}) = -\mathbf{E}_\infty \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

Exercice 2.17★

On considère un milieu conducteur semi-infini limité par un plan occupant la région $x^1 \geq a$ avec $a > 0$.

1. Déterminer le potentiel $\Phi_+(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ produit par une charge ponctuelle Q située en un point \mathbf{x}_0 extérieur au milieu conducteur le milieu conducteur étant assujéti au potentiel 0.
2. Même question. Déterminer le potentiel $\Phi_-(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ lorsque le milieu conducteur occupe la région $x^1 \leq -a$, la charge étant située à l'extérieur de ce milieu, ce milieu étant assujéti au potentiel 0.
3. Ensuite déterminer le potentiel électrostatique lorsque les deux milieux conducteurs sont présents et que la charge électrique ponctuelle est située dans la région vide intermédiaire les deux conducteurs étant assujétis au potentiel 0. Utiliser la méthode des images. Il est commode et pas restrictif de supposer que la charge électrique ponctuelle Q est située au point $(x_0, 0, 0)$ avec $-a < x_0 < a$.
4. Finalement déterminer la charge électrique portée par chacun des conducteurs semi-infinis.

Indication : *Pensez à votre image lorsque vous vous trouvez entre deux miroirs parallèles. Bien sûr vous n'êtes pas électriquement chargés, mais vous avez le coeur à gauche !.*

Solution :

On commence par introduire les opérations de symétrie $\mathbf{g}_{\pm} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{g}_{\pm}(\mathbf{x})$ par rapport aux plans $x^1 = \pm a$ respectivement. Formellement

$$\mathbf{g}_{\pm}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \pm 2 \left(1 \mp \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{a^2}\right) \mathbf{a} \quad \text{en particulier} \quad \mathbf{g}_{\pm}(\mathbf{x}_0) = -\mathbf{x}_0 \pm 2 \mathbf{a}$$

La réponse à la première question est fournie par les expressions

$$\Phi_{\pm}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 \mp 2 \mathbf{a}\|} \right)$$

et on peut aisément vérifier que

$$\Phi_{\pm}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{si} \quad x^1 = \pm a \quad \text{respectivement.}$$

Pour la suite il est utile de commencer par établir les propriétés que voici

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_+(-\mathbf{x}) &= -\mathbf{g}_-(\mathbf{x}) & , & & \mathbf{g}_+(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_-(\mathbf{x}) &= 4 \mathbf{a} \\ \text{et} & & \mathbf{g}_+ \circ \mathbf{g}_+(\mathbf{x}) &= & \mathbf{g}_- \circ \mathbf{g}_-(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} \end{aligned}$$

En outre

$$\mathbf{g}_{\pm} \circ \mathbf{g}_{\mp}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \pm 4 \mathbf{a} \quad \text{puis} \quad \mathbf{g}_{\mp} \circ \mathbf{g}_{\pm} \circ \mathbf{g}_{\mp}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_{\mp}(\mathbf{x}) \mp 4 \mathbf{a}$$

Plus généralement

$$(\mathbf{g}_{\pm} \circ \mathbf{g}_{\mp})^{on}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \pm 4 n \mathbf{a}$$

Les coordonnées des images successives du point \mathbf{x} par rapport au plan $x^1 = a$ puis de cette image par rapport au plan $x^1 = -a$ et ainsi de suite et les images successives de ce point \mathbf{x} , d'abord par rapport au plan $x^1 = -a$ puis de cette image par rapport au plan $x^1 = a$, et ainsi de suite sont données par les expressions

$$\mathbf{g}_+(\mathbf{x}_0) \quad , \quad \mathbf{g}_- \circ \mathbf{g}_+(\mathbf{x}_0) \quad , \quad \mathbf{g}_+ \circ \mathbf{g}_- \circ \mathbf{g}_+(\mathbf{x}_0) \quad , \quad \dots$$

et

$$\mathbf{g}_-(\mathbf{x}_0) \quad , \quad \mathbf{g}_+ \circ \mathbf{g}_-(\mathbf{x}_0) \quad , \quad \mathbf{g}_- \circ \mathbf{g}_+ \circ \mathbf{g}_-(\mathbf{x}_0) \quad , \quad \dots$$

Par conséquent la distribution des charges images est la suivante.

Charge réelle	+ Q	en	+x ₀	
Charge image	- Q	en	-x ₀ + 2 a	et
Charge image	+ Q	en	+x ₀ - 4 a	et
Charge image	- Q	en	-x ₀ + 6 a	et
Charge image	+ Q	en	+x ₀ - 8 a	et
Charge image	- Q	et	ainsi de suite ...	

Formellement le potentiel général est donné par,

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - 4n\mathbf{a}\|} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\|\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 - (2+4n)\mathbf{a}\|} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\|\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 + (2+4n)\mathbf{a}\|} \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - 4n\mathbf{a}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 - (2+4n)\mathbf{a}\|} \right]\end{aligned}$$

Il est manifeste que le potentiel $\Phi(\mathbf{x})$ est la différence de deux fonctions périodiques de période $4\mathbf{a}$ l'une étant obtenue à partir de l'autre par une translation de vecteur $2\mathbf{a}$ ou $-2\mathbf{a}$. Il est par conséquent évident que le potentiel $\Phi(\mathbf{x})$ est périodique, de période $4\mathbf{a}$ et impair par rapport aux plans $x^1 = a$ et $x^1 = -a$. Ce potentiel est donc nul sur la surface des milieux conducteurs

$$\Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \quad \text{tel que } x^1 = \pm a.$$

Pour les charges électriques portées par chacun des conducteurs il faut commencer par remarquer que chacun des termes de la forme

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - 4n\mathbf{a}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 - (2+4n)\mathbf{a}\|} \right]$$

pour lequel n est non nul correspond à un champ de déplacement électrique dont le flux au travers de chacune des surfaces des milieux conducteurs est nul. Donc, en vertu de la loi de Gauss, la charge électrique sur la surface $x^1 = a$ du conducteur vaut

$$Q_+ = \frac{Q}{4\pi} \int_0^\infty (-2\pi\rho \, d\rho) \frac{a - x_0^1}{(\sqrt{\rho^2 + (a - x_0^1)^2})^3} = \frac{Q}{2} \frac{a - x_0^1}{\sqrt{\rho^2 + (a - x_0^1)^2}} \Big|_0^\infty = \frac{-Q}{2}$$

et "a fortiori" $Q_- = -Q/2$.

Exercice 2.18

On considère N couronnes sphériques conductrices $\Gamma_k, k = 1, 2, \dots, N$ centrées sur l'origine des coordonnées. Soient R_k^- et R_k^+ les rayons interne et externe de la couronne Γ_k . Ces rayons satisfont aux conditions

$$0 = R_1^- < R_1^+ < R_2^- < R_2^+ < \dots < R_N^- < R_N^+ < R_{N+1}^- = +\infty$$

En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) les régions conductrices sont les régions $\Gamma_k = \{ R_k^- \leq r \leq R_k^+ \}$.

On demande de déterminer la matrice des coefficients d'induction électrique $C_{jk}, j, k=1, 2, \dots, N$.

Indication : Ne pas utiliser la méthode générale passant par la formule (2.105) qui fait usage de la fonctions de Green. Utiliser une méthode plus simple et plus directe qui exploite la symétrie sphérique du système des conducteurs.

Solution :

Attribuons à chaque couronne conductrice Γ_k un potentiel Φ_k et convenons que $\Phi_{N+1} = 0$. Désignons par le symbole Q_k^+ la charge électrique de la surface $r = R_k^+$. Dans ces conditions la charge électrique portée par la surface $r = R_{k+1}^-$ vaut $-Q_k^+$.

Ainsi, en vertu de la loi de Gauss et compte tenu de la symétrie sphérique,

$$\frac{Q_k^+}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{1}{r^2} = E_r(r) = -\frac{d\Phi}{dr}, \quad \text{lorsque } R_k^+ \leq r \leq R_{k+1}^-$$

Par conséquent

$$\Phi_{k+1} - \Phi_k = \frac{Q_k^+}{4 \pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_{k+1}^-} - \frac{1}{R_k^+} \right), \quad k = 1, \dots, N$$

ou encore

$$Q_k^+ = C_k (\Phi_k - \Phi_{k+1}), \quad k = 1, \dots, N$$

Dans cette dernière expression nous avons posé

$$C_k = \frac{4 \pi \varepsilon_0 R_{k+1}^- R_k^+}{R_{k+1}^- - R_k^+}, \quad k = 1, \dots, N-1 \quad \text{et} \quad C_N = 4 \pi \varepsilon_0 R_N^+$$

Pour la charge électrique totale Q_k du conducteur Γ_k , puisque $Q_k^- = -Q_{k-1}^+$, $k = 2, \dots, N$, alors

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1^+ = C_1 (\Phi_1 - \Phi_2) \\ Q_k &= Q_k^+ + Q_k^- = Q_k^+ - Q_{k-1}^+ = C_k (\Phi_k - \Phi_{k+1}) - C_{k-1} (\Phi_{k-1} - \Phi_k) \\ &= -C_{k-1} \Phi_{k-1} + (C_k + C_{k-1}) \Phi_k - C_k \Phi_{k+1} \quad k = 2, \dots, N-1 \\ Q_N &= -C_{N-1} \Phi_{N-1} + (C_N + C_{N-1}) \Phi_N \end{aligned}$$

En conclusion, après comparaison de l'expression précédente avec l'expression générale (2.103), on constate que la matrice des coefficients d'induction électrique est C_{jk} formée des éléments

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_1, \quad C_{kk} = C_k + C_{k-1}, \quad k = 2, \dots, N. \\ C_{k,k+1} &= C_{k+1,k} = -C_k, \quad k = 1, \dots, N-1. \\ \text{autrement } C_{jk} &= 0 \quad \text{si } |j-k| \geq 1 \end{aligned}$$

Exercice 2.19

Quel est le potentiel électrique produit par un dipôle électrique \mathbf{p} situé en \mathbf{x}_0 mis en présence d'une boule conductrice de rayon R centrée à l'origine et assignée au potentiel électrique zéro, autrement dit au même potentiel qu'à l'infini ? Il est bien entendu supposé que $\|\mathbf{x}_0\| > R$.

En présence du dipôle électrique \mathbf{p} la boule est-elle devenue électriquement chargée ? Si oui, quelle est la charge électrique de celle-ci ?

Indication : Utiliser la méthode des images.

Solution :

On se donne des charges électriques $\pm Q$ situées en $\mathbf{x}_0 \pm \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}_0$ respectivement et telles que $\mathbf{p} = Q \delta\mathbf{x}_0$. Notons Q_{\pm}^* les charges images situées en $(\mathbf{x}_0 \pm \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}_0)^*$ de ces charges $\pm Q$. Pour la suite on se référera aux résultats de la sous-section 2.4.5. On adopte les mêmes conventions d'écriture. Ainsi

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_0 \pm \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}_0)^* &= \frac{R^2}{\|\mathbf{x}_0 \pm \delta\mathbf{x}_0/2\|^2} (\mathbf{x}_0 \pm \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}_0) \\ &= \frac{R^2}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \left(\mathbf{x}_0 \pm \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}_0 \mp \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \delta\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \mathbf{x}_0 \right) + O(\|\delta\mathbf{x}_0\|^2) = \mathbf{x}_0^* \pm \frac{\delta\mathbf{x}_0^*}{2} \end{aligned}$$

où $\mathbf{x}_0^* = \frac{R^2}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \mathbf{x}_0$ et $\delta\mathbf{x}_0^* \approx \frac{R^2}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \left(\delta\mathbf{x}_0 - 2 \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \delta\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \mathbf{x}_0 \right)$

De plus

$$\begin{aligned} Q_{\pm}^* &= -(\pm Q) \frac{R}{\|\mathbf{x}_0 \pm \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}_0\|} \\ &= -(\pm Q) \frac{R}{\|\mathbf{x}_0\|} \left(1 \mp \frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \delta\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \right) = \pm Q^* + \frac{\delta Q^*}{2} \end{aligned}$$

où $Q^* = -Q \frac{R}{\|\mathbf{x}_0\|}$ et $\delta Q^* \approx Q \frac{R}{\|\mathbf{x}_0\|} \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \delta\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^2}$

Donc, à la limite $\|\delta\mathbf{x}_0\| \rightarrow 0$ et $Q \rightarrow \infty$ avec $Q \delta\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{p}$ il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^* &= -Q^* \delta\mathbf{x}_0^* = Q \frac{R}{\|\mathbf{x}_0\|} \frac{R^2}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \left(\delta\mathbf{x}_0 - 2 \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \delta\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \mathbf{x}_0 \right) \\ &\rightarrow \frac{R^3}{\|\mathbf{x}_0\|^3} \left(\mathbf{p} - 2 \frac{(\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{p}) \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \right) \end{aligned}$$

Autrement dit, l'image du dipôle \mathbf{p} situé en \mathbf{x}_0 est le dipôle virtuel

$$\mathbf{p}^* = \frac{R^3}{\|\mathbf{x}_0\|^3} (\mathbf{p}_{\perp} - \mathbf{p}_{\parallel}) \quad \text{où} \quad \mathbf{p}_{\parallel} = \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{p}}{\|\mathbf{x}_0\|^2} \mathbf{x}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_{\parallel}$$

situé en \mathbf{x}_0^* . En outre, à l'effet de ce dipôle virtuel s'ajoute l'effet d'une charge électrique virtuelle

$$\delta Q^* \rightarrow \frac{R}{\|\mathbf{x}_0\|} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^2}$$

située au même point. Finalement le potentiel électrostatique recherché s'écrit

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} + \frac{\mathbf{p}^* \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*\|^3} + \frac{R}{\|\mathbf{x}_0\|^3} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*\|} \right]$$

Exercice 2.20.

Déterminer le potentiel et le champ électrique produit par une boule diélectrique (fermée) de rayon R polarisée rigidement et uniformément : $\mathbf{P}(\mathbf{y}) = \mathbf{P}_0$, $\forall \mathbf{y} \in B(0, R)$. Discussion qualitative du résultat.

Solution :

On adopte un système de coordonnées cartésiennes tel que l'axe Ox^3 est orienté selon le vecteur \mathbf{P}_0 . On utilise ensuite les coordonnées sphériques associées à ces coordonnées cartésiennes. Posons encore $x = \|\mathbf{x}\|$. Vu les formules (2.131) et (2.132).

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\mathbf{P}_0 \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \\ &= \frac{R^2 \mathbf{P}_0}{4 \pi \varepsilon_0} \cdot \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{(\sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3)}{\sqrt{r^2 - 2 r R \cos \theta + R^2}} \\ &= \frac{R^2 \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{e}_3}{2 \varepsilon_0} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \frac{\cos \theta}{\sqrt{r^2 - 2 r R \cos \theta + R^2}} \\ &= \frac{R^2 \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{e}_3}{2 \varepsilon_0} \left[\frac{r^2 + r R \cos \theta + R^2}{3 r^2 R^2} \sqrt{r^2 - 2 r R \cos \theta + R^2} \right]_0^\pi \\ &= \frac{R^2 \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{e}_3}{2 \varepsilon_0} \left[\frac{r^2 + R^2}{3 r^2 R^2} (|r + R| - |r - R|) - \frac{1}{3 r R} (|r + R| + |r - R|) \right] \end{aligned}$$

Finalement

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{e}_3}{\varepsilon_0} \frac{r}{3} = \frac{\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{x}}{3 \varepsilon_0} & \text{si } r \leq R \\ \frac{R^3 \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{e}_3}{\varepsilon_0} \frac{1}{3 r^2} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{4 \pi R^3 \mathbf{P}_0}{3} \cdot \frac{\mathbf{x}}{r^3} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

Par conséquent le champ électrique à l'intérieur de la boule est un champ électrique uniforme de valeur

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}_0}{3 \varepsilon_0}$$

A l'extérieur, le champ électrique est celui que produirait un dipôle électrique de valeur

$$\mathbf{p} = \frac{4 \pi R^3 \mathbf{P}_0}{3}$$

centré à l'origine.

Exercice 2.21

On considère un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope, de constante diélectrique ε , où règne un champ électrique uniforme $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_\infty$. On réalise une cavité sphérique de rayon R au sein de ce milieu diélectrique. Quel est le champ électrique qui règne dans cette cavité ?

Indication : Il est utile de se servir des résultats établis dans la sous-section 2.5.6.

Solution :

En fait il suffit d'échanger les rôles des constantes ε_0 et ε dans les résultats (2.167), (2.168) et (2.169)

Exercice 2.22★

Soient deux cylindres conducteurs 1 et 2 d'axes parallèles distants de L , de rayons R_1 et R_2 avec $L > R_1 + R_2$. Le milieu extérieur aux cylindres est un fluide dont la permittivité est ε . La différence de potentiel entre les deux cylindres vaut U .

Déterminer la densité superficielle de charge à la surface des cylindres ainsi que la force par unité de longueur exercée par un cylindre sur l'autre.

Indications : Soient deux points P_1 et P_2 dans l'espace \mathbb{R}^2 des coordonnées cartésiennes (x, y) . Les coordonnées de ces points sont $P_1 : (+a, 0)$ et $P_2 : (-a, 0)$ où $a > 0$.

Soit un faisceau de cercles, notés $\mathcal{F}_{\text{champ}}(y_0)$, formé de tous les cercles passant par les points P_1 et P_2 . Les coordonnées du centre d'un tel cercle $C_1(y_0)$ sont $(0, y_0)$. Le rayon de ce cercle a donc pour valeur $\sqrt{y_0^2 + a^2}$.

On vérifiera que les cercles de centre $(x_0, 0)$ et de rayon $\sqrt{x_0^2 - a^2}$ où $|x_0| \geq a$ forment un faisceau de cercles, notés $\mathcal{F}_{\text{equipot}}(x_0)$, orthogonaux aux cercles du faisceau $\mathcal{F}_{\text{champ}}(y_0)$. Les équations des cercles qui constituent ces deux faisceaux sont donc les suivantes :

$$\mathcal{F}_{\text{champ}}(y_0) : x^2 - 2 y_0 y + y^2 = a^2$$

et

$$\mathcal{F}_{\text{equipot}}(x_0) : x^2 - 2 x_0 x + y^2 = -a^2$$

Est-ce que, par un heureux hasard! et pour une valeur appropriée de la constante a , les cercles du faisceau $\mathcal{F}_{\text{equipot}}(x_0)$ pourraient correspondre, dans un plan orthogonal aux axes des cylindres métalliques, aux surfaces équipotentielles du champ électrique qu'ils produisent ?

Solution :

Tentons notre chance! Si les indications données sont fondées alors il faut que

$$R_1 = \sqrt{x_1^2 - a^2} \quad , \quad R_2 = \sqrt{x_2^2 - a^2} \quad \text{et} \quad x_1 - x_2 = L$$

où les points $(x_1, 0)$ et $(x_2, 0)$ correspondent aux intersections des axes des cylindres métalliques avec le plan perpendiculaire évoqué plus haut. Ces conditions déterminent les valeurs des grandeurs x_1 , x_2 et a . L'équation

$$\sqrt{R_1^2 + a^2} + \sqrt{R_2^2 + a^2} = L$$

fournit la valeur de la constante $a > 0$

$$a = \frac{1}{2L} \sqrt{(L^2 - R_1^2 - R_2^2)^2 - 4 R_1^2 R_2^2}$$

dont il découle ensuite les abscisses

$$x_1 = \frac{L^2 + R_1^2 - R_2^2}{2L} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{L^2 + R_2^2 - R_1^2}{2L}$$

D'après notre conjecture, le potentiel devrait être constant sur chaque cercle du faisceau $\mathcal{F}_{\text{equipot}}(x_0)$. Ce potentiel devrait donc s'exprimer comme une fonction $F(x_0)$ du paramètre x_0 pris comme une fonction $x_0(x, y)$ des variables x et y . En d'autres termes, vu l'équation du cercle $\mathcal{F}_{\text{equipot}}(x_0)$, il vient

$$\Phi(x, y) = F(x_0(x, y)) \quad \text{où} \quad x_0(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + a^2}{2x}$$

La première vérification à effectuer est de montrer que cette dernière fonction F peut être choisie de telle manière que le laplacien (en dimension 2) de la fonction $\Phi(x, y)$ s'annule en dehors des cercles $\mathcal{F}_{\text{equipot}}(x_1)$ et $\mathcal{F}_{\text{equipot}}(x_2)$. En effet

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{y^2 + a^2}{x^2} \right) \frac{dF(x_0(x, y))}{dx_0}$$

et

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = \frac{y}{x} \frac{dF(x_0(x, y))}{dx_0}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(x, y) &= \frac{d^2F(x_0(x, y))}{dx_0^2} \left(\frac{1}{4} \left(1 - \frac{y^2 + a^2}{x^2} \right)^2 + \frac{y^2}{x^2} \right) \\ &+ \frac{dF(x_0(x, y))}{dx_0} \left(\frac{y^2 + a^2}{x^3} + \frac{1}{x} \right)\end{aligned}$$

Après réduction, on constate que l'expression du laplacien $\Delta\Phi(x, y)$ s'écrit

$$\Delta\Phi(x, y) = \frac{x_0(x, y)^2 - a^2}{x^2} \frac{d^2F(x_0(x, y))}{dx_0^2} + \frac{2 x_0(x, y)}{x^2} \frac{dF(x_0(x, y))}{dx_0}$$

Par conséquent l'équation $\Delta\Phi(x, y) \equiv 0$ est vérifiée si et seulement si

$$(x_0^2 - a^2) \frac{d^2F(x_0)}{dx_0^2} + 2 x_0 \frac{dF(x_0)}{dx_0} = 0$$

autrement dit si et seulement si

$$\Phi(x, y) = F(x_0(x, y)) = V \arg \tanh \frac{a}{x_0(x, y)} + C$$

Les symboles V et C désignent des constantes d'intégrations. La constante C est sans signification et peut être posée égale à 0. La différence de potentiel entre les cylindres implique que

$$U = V \arg \tanh (a/x_1) - \arg \tanh (a/x_2)$$

Finalement le potentiel qui décrit le champ électrique qui règne dans l'espace qui sépare les deux cylindres conducteurs s'écrit

$$\Phi(x, y) = \frac{U}{\arg \tanh (a/x_1) - \arg \tanh (a/x_2)} \arg \tanh \left(\frac{2 a x}{x^2 + y^2 + a^2} \right)$$

On notera que

$$\arg \tanh \left(\frac{a}{x_1} \right) = + \arg \sinh \left(\frac{a}{R_1} \right) \quad \text{et} \quad \arg \tanh \left(\frac{a}{x_2} \right) = - \arg \sinh \left(\frac{a}{R_2} \right)$$

Le champ électrique est alors décrit par le champ de vecteurs

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, y) &= -\mathbf{grad} \Phi(x, y) = -\frac{dF(x_0(x, y))}{dx_0} \mathbf{grad} x_0(x, y) \\ &= \frac{a V}{(x_0(x, y))^2 - a^2} \left[\frac{x^2 - y^2 - a^2}{2 x^2}, \frac{y}{x} \right]\end{aligned}$$

A la surface du cylindre conducteur $\ell = 1$ ou 2 le champ électrique prend les valeurs

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{a V}{x_\ell^2 - a^2} \left[\frac{x^2 - y^2 - a^2}{2 x^2}, \frac{y}{x} \right]$$

$$\text{où } x = x_\ell + R_\ell \cos \phi \text{ et } y = R_\ell \cos \phi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

Autrement dit

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{a}{R_\ell} \frac{V}{x_\ell + R_\ell \cos \phi} [\cos \phi, \sin \phi]$$

Par conséquent, à la surface des cylindres conducteurs $\ell = 1$ ou 2 la densité superficielle de charge électrique $\omega_\ell(\phi)$ en fonction de l'angle ϕ s'écrit

$$\omega_\ell(\phi) = \frac{\varepsilon a}{R_\ell} \frac{V}{x_\ell + R_\ell \cos \phi}$$

Quant à la force par unité de longueur \mathbf{f}_ℓ subie par le cylindre ℓ elle est donnée, selon la formule (2.94), par l'expression

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\ell &= \int_0^{2\pi} R_\ell d\phi \frac{\varepsilon}{2} \frac{a^2}{R_\ell^2} \left(\frac{V}{x_\ell + R_\ell \cos \phi} \right)^2 [\cos \phi, \sin \phi] \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{a^2 V^2}{R_\ell^3} \int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{R_\ell}{x_\ell + R_\ell \cos \phi} \right)^2 [\cos \phi, \sin \phi] \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{a^2 V^2}{R_\ell^3} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi d\phi}{(\alpha_\ell + \cos \phi)^2} \times [1, 0] \quad \text{où } \alpha_\ell = \frac{x_\ell}{R_\ell} \end{aligned}$$

Finalement

$$\mathbf{f}_\ell = \mp \pi \varepsilon \frac{V^2}{a} \times [1, 0]$$

car

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi d\phi}{(\alpha_\ell + \cos \phi)^2} = \mp \frac{2\pi}{(\sqrt{\alpha_\ell^2 - 1})^3} = \mp 2\pi \frac{R_\ell^3}{a^3} \quad \text{selon que } \ell = 1 \text{ ou } 2.$$

Exercice 2.23★

Deux fluides diélectriques 1 et 2 dont les permittivités sont ε_1 et ε_2 entrent en contact selon une surface de séparation plane infinie. Deux charges électriques ponctuelles Q_1 et Q_2 sont situées de part et d'autre de cette surface à des distances de a_1 et a_2 et la droite qui joint les positions de ces charges est orthogonale au plan de séparation des deux fluides. Déterminer les forces qui s'exercent sur ces charges. Pourquoi ne sont-elles pas opposées ?

Indications : S'inspirer et faire usage des résultats de la sous-section 2.5.7, en particulier de la formule (2.175)

Solution :

La charge Q_1 occupe une position \mathbf{a}_1 dans le milieu 1 et la charge Q_2 occupe une position \mathbf{a}_2 dans le milieu 2. La droite qui joint ces deux positions est orthogonale à la surface de séparation des deux milieux et l'origine des coordonnées est placée à l'intersection de cette droite avec ce plan de séparation.

Le champ électrique au point \mathbf{a}_1 dû au milieu diélectrique 2 et le champ électrique au point \mathbf{a}_2 dû au milieu diélectrique 1 sont fournis par l'expression (2.171) compte tenu du résultat (2.173). Dans le premier cas Q_1 joue le rôle de Q , \mathbf{a}_1 celui de \mathbf{a} , ε_1 celui de ε_0 et ε_2 celui de ε . Dans le second cas les indices 1 et 2 sont échangés.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_P(\mathbf{a}_1) &= \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_1} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\mathbf{a}_1}{4 \|\mathbf{a}_1\|^3} \\ \mathbf{E}_P(\mathbf{a}_2) &= \frac{Q_2}{4\pi \varepsilon_2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{\mathbf{a}_2}{4 \|\mathbf{a}_2\|^3}\end{aligned}$$

Le champ électrique au point \mathbf{a}_1 dû à la charge Q_2 et le champ électrique au point \mathbf{a}_2 dû à la charge Q_1 sont fournis par l'expression (2.172) compte tenu du résultat (2.173).

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_Q(\mathbf{a}_1) &= \frac{Q_2}{4\pi \varepsilon_1} \frac{2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\|^3} \\ \mathbf{E}_Q(\mathbf{a}_2) &= \frac{Q_1}{4\pi \varepsilon_2} \frac{2 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1\|^3}\end{aligned}$$

Dans ces conditions les forces qui s'exercent sur les porteurs des charges Q_1 et Q_2 sont respectivement

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= Q_1 (\mathbf{E}_P(\mathbf{a}_1) + \mathbf{E}_Q(\mathbf{a}_1)) \\ &= \frac{Q_1^2}{4\pi \varepsilon_1} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\mathbf{a}_1}{4 \|\mathbf{a}_1\|^3} + \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \varepsilon_1} \frac{2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\|^3} \\ \mathbf{F}_2 &= Q_2 (\mathbf{E}_P(\mathbf{a}_2) + \mathbf{E}_Q(\mathbf{a}_2)) \\ &= \frac{Q_2^2}{4\pi \varepsilon_2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{\mathbf{a}_2}{4 \|\mathbf{a}_2\|^3} + \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \varepsilon_2} \frac{2 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1\|^3}\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 &= Q_1 \mathbf{E}_P(\mathbf{a}_1) + Q_2 \mathbf{E}_P(\mathbf{a}_2) \\ &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left[\frac{Q_1^2}{4\pi \varepsilon_1} \frac{\mathbf{a}_1}{4 \|\mathbf{a}_1\|^3} - \frac{Q_2^2}{4\pi \varepsilon_2} \frac{\mathbf{a}_2}{4 \|\mathbf{a}_2\|^3} \right] \neq 0\end{aligned}$$

ce qui est l'opposé de la force subie par le milieu diélectrique. En particulier cette dernière somme des forces s'annule lorsque les constantes diélectriques ε_1 et ε_2 sont égales.

Exercice 2.24

On considère un milieu diélectrique formé de tranches de milieux diélectriques linéaires, isotropes et homogènes, d'épaisseurs δ_1 et δ_2 de constantes diélectriques ε_1 et ε_2 respectivement.

Placé à une échelle où les épaisseurs δ_1 et δ_2 apparaissent comme infinitésimales, quelles sont les propriétés diélectriques macroscopiques (ou encore moyennes) du milieu ainsi formé? Ce milieu est-il isotrope? Sinon, quelles sont les composantes du tenseur diélectrique?

On supposera que l'axe Ox^3 est perpendiculaire aux surfaces de séparation des milieux.

Solution :

On se donne un champ de déplacement électrique uniforme $\mathbf{D} = (0, 0, D^3)$. Ce champ satisfait donc aux conditions aux limites (2.160) et (2.161) sur toutes les surfaces de séparation des deux milieux diélectriques. Adoptons les notations $\mathbf{E}_1 = (0, 0, E_1^3)$ et $\mathbf{E}_2 = (0, 0, E_2^3)$. Dans ces conditions

$$D^3 = \varepsilon_1 E_1^3 = \varepsilon_2 E_2^3$$

et la densité moyenne \bar{u}_e d'énergie électrique est donnée par l'expression

$$\bar{u}_e = \frac{(D^3)^2}{2 \varepsilon_1} \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} + \frac{(D^3)^2}{2 \varepsilon_2} \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} = \frac{(D^3)^2}{2 \bar{\varepsilon}_{33}}$$

où $\bar{\varepsilon}_{33}$ désigne la constante diélectrique moyenne du milieu. Par conséquent

$$\bar{\varepsilon}_{33} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\delta_1 + \delta_2)}{\varepsilon_1 \delta_2 + \varepsilon_2 \delta_1}$$

Quant au champ électrique moyen correspondant il s'écrit

$$\bar{\mathbf{E}}^3 = \frac{D^3}{\bar{\varepsilon}_{33}} = \frac{E_1^3 \delta_1 + E_2^3 \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}$$

Ensuite on se donne un champ électrique uniforme $\mathbf{E} = (E^1, 0, 0)$ tangentiel (ou parallèle) aux surfaces de séparation des milieux diélectriques. Ce champ satisfait aussi aux conditions aux limites (2.160) et (2.161) sur toutes les surfaces de séparation des deux milieux diélectriques. Notons $\mathbf{D}_1 = (D_1^1, 0, 0)$ et $\mathbf{D}_2 = (D_2^1, 0, 0)$. Dans ces nouvelles conditions

$$E^1 = \frac{D_1^1}{\varepsilon_1} = \frac{D_2^1}{\varepsilon_2}$$

et la densité moyenne \bar{u}_e d'énergie électrique est donnée par l'expression

$$\bar{u}_e = \frac{\varepsilon_1 (E^1)^2}{2} \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} + \frac{\varepsilon_2 (E^1)^2}{2} \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} = \frac{\bar{\varepsilon}_{11} (E^1)^2}{2}$$

où $\bar{\varepsilon}_{11}$ désigne la constante diélectrique moyenne du milieu. Par conséquent

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\varepsilon_1 \delta_1 + \varepsilon_2 \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}$$

Quant au champ de déplacement électrique moyen correspondant il s'écrit

$$\bar{D}^1 = \bar{\varepsilon}_{11} E^1 = \frac{D_1^1 \delta_1 + D_2^1 \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}$$

En conclusion, les composantes non-nulles du tenseur diélectrique moyen sont $\bar{\varepsilon}_{22} = \bar{\varepsilon}_{11}$ et $\bar{\varepsilon}_{33}$. Autrement $\bar{\varepsilon}_{ij} = 0, \forall i \neq j$.

Exercice 2.25

Revenir à l'énoncé de l'exercice 2.19. Cette fois la boule conductrice possède une charge électrique totale nulle. Quel est le potentiel électrostatique produit par le dipôle électrique \mathbf{p} situé en \mathbf{x}_0 . A quel potentiel électrostatique la boule conductrice est-elle astreinte ?

Solution :

Il suffit d'ajouter une distribution superficielle uniforme de charge électrique sur le bord de la boule $B(\mathbf{0}, R)$ de manière à neutraliser la charge électrique virtuelle δQ^* . La densité de cette distribution superficielle de charge électrique a donc pour valeur

$$\omega = \frac{-\delta Q^*}{4 \pi R^2} = -\frac{1}{4 \pi R} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^3}$$

et la boule conductrice doit être assignée au potentiel (toujours par rapport à l'infini)

$$\Phi_0 = \frac{-\delta Q^*}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{1}{R} = -\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^3}$$

Finalement le potentiel s'écrit

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \\ &\times \left[\frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} + \frac{\mathbf{p}^* \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*\|^3} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|^3} \left(\frac{R}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*\|} - \frac{R}{\|\mathbf{x}\|} \right) \right] \end{aligned}$$

Chapitre 3

Solutions des exercices du chapitre 3

Exercice 3.1

On considère un courant filiforme circulaire d'intensité I et de rayon R . Déterminer le champ d'induction $\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ créé par ce courant sur l'axe de symétrie cylindrique passant par le centre du cercle et orthogonal au plan défini par ce dernier cercle.

Solution :

Adoptons pour axe de symétrie cylindrique l'axe Ox^3 d'un système de coordonnées cartésiennes orienté à droite, le courant filiforme circulaire étant centré à l'origine et situé dans le plan Ox^1x^2 . Le champ d'induction au point $\mathbf{x} = z \mathbf{e}_3$ est donné par la formule de Biot et Savart (3.6). Relativement au système de coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) qui est adopté on dispose de l'expression suivante pour le champ d'induction

$$\check{\mathbf{B}}(z \mathbf{e}_3) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R (-\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2) \wedge [z \mathbf{e}_3 - R (\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2)]}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3}$$

Après réduction de l'intégrant, on parvient à l'expression

$$\check{\mathbf{B}}(z \mathbf{e}_3) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \int_0^{2\pi} d\phi \frac{-z R \sin \phi (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) + z R \cos \phi (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) + R^2 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3}$$

L'intégration relative à la variable ϕ étant effectuée on obtient le résultat final que voici

$$\check{\mathbf{B}}(z \mathbf{e}_3) = \frac{\mu_0 I}{2 R} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)^3 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$$

Exercice 3.2

Même question que dans l'exercice 3.1 mais pour le champ d'induction $\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ créé par un disque de rayon R portant une charge électrique superficielle uniforme de densité ω et tournant à la fréquence ν .

Solution :

Comme dans l'exercice précédent adoptons pour axe de symétrie cylindrique l'axe Ox^3 d'un système de coordonnées cartésiennes orienté à droite, le disque uniformément chargé étant centré à l'origine et situé dans le plan Ox^1x^2 . Le champ d'induction au point $\mathbf{x} = z \mathbf{e}_3$ est donné par la formule (3.15) où la densité de courant est maintenant remplacée par la densité superficielle de courant. En coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) l'expression correspondante s'écrit

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{B}}(z \mathbf{e}_3) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi (\omega 2\pi\nu \rho) \\ &\times \frac{(-\sin\phi \mathbf{e}_1 + \cos\phi \mathbf{e}_2) \wedge [z \mathbf{e}_3 - \rho (\cos\phi \mathbf{e}_1 + \sin\phi \mathbf{e}_2)]}{(\sqrt{\rho^2 + z^2})^3} \\ &= \mu_0 \omega \pi\nu \int_0^R d\rho \left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right)^3 (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

La seconde égalité est obtenue après avoir effectué l'intégration relative à la variable angulaire ϕ . Ensuite, moyennant le changement de variable d'intégration de ρ en $u = \rho^2/z^2$ on parvient à l'expression

$$\begin{aligned} \int_0^R d\rho \left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right)^3 &= \frac{|z|}{2} \int_0^{R^2/z^2} \frac{u du}{(\sqrt{u+1})^3} = |z| \frac{u+2}{\sqrt{u+1}} \Big|_{u=0}^{R^2/z^2} \\ &= \frac{R^2 + 2 z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2 |z| \end{aligned}$$

Finalement, on obtient la formule finale

$$\check{\mathbf{B}}(z \mathbf{e}_3) = \mu_0 \omega \pi\nu \left(\frac{R^2 + 2 z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2 |z| \right) (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$$

Exercice 3.3

Déterminer le champ d'induction $\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ produit par un solénoïde de longueur infinie. A la limite, les courants parcourant le solénoïde pourront être assimilés

aux courants produits par un cylindre circulaire de longueur infinie et de rayon R , porteur d'une charge électrique superficielle uniforme de densité superficielle ω et tournant autour de l'axe de symétrie avec une fréquence ν .

Solution :

Adoptons pour axe du solénoïde l'axe Ox^3 d'un système de coordonnées cartésiennes orienté à droite. Relativement aux coordonnées cylindriques correspondantes (ρ, ϕ, z) , l'expression du champ d'induction $\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ produit ne dépend ni de la coordonnée $z = x^3$, ni de la coordonnée ϕ . Par conséquent $\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \check{\mathbf{B}}^3(\rho) \mathbf{e}_3$. Il suffit donc de déterminer ce champ d'induction $\check{\mathbf{B}}(\rho)$ en un point $\mathbf{x} = \rho \mathbf{e}_1$. Partant de la formule (3.15) où la densité de courant est maintenant remplacée par la densité superficielle de courant $\omega 2\pi \nu R (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$ on obtient l'expression

$$\check{\mathbf{B}}(\rho) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} R d\phi (\omega 2\pi \nu R) \\ \times \frac{(-\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2) \wedge [(\rho - R \cos \phi) \mathbf{e}_1 - R \sin \phi \mathbf{e}_2 - z \mathbf{e}_3]}{(\sqrt{(\rho - R \cos \phi)^2 + (R \sin \phi)^2 + z^2})^3}$$

L'intégration relative à la variable z est immédiate. Le terme de l'intégrand qui est impair par rapport à z apporte une contribution nulle. Pour le terme de l'intégrand qui est pair par rapport à la variable z il suffit de remarquer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(\sqrt{a^2 + z^2})^3} = \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(\cosh u)^2} = \frac{1}{a^2} \tanh u \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{a^2}$$

moyennant le changement de variable d'intégration de z en $z = a \sinh u$. Compte tenu de ce dernier résultat on parvient à l'expression que voici

$$\check{\mathbf{B}}(\rho) = \mu_0 \omega \nu R \int_0^{2\pi} R d\phi \\ \times \frac{(-\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2) \wedge [(\rho - R \cos \phi) \mathbf{e}_1 - R \sin \phi \mathbf{e}_2]}{(\rho - R \cos \phi)^2 + (R \sin \phi)^2} \\ = \mu_0 \omega \nu R \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R (R - \rho \cos \phi)}{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \phi} (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = \mu_0 \omega 2\pi \nu R \check{\mathbf{e}}_3$$

En effet

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R (R - \rho \cos \phi)}{\rho^2 + R^2 - 2 \rho R \cos \phi} \\
 = & \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{2} \left[\frac{R}{R - \rho \exp(+i\phi)} + \frac{R}{R - \rho \exp(-i\phi)} \right] \\
 = & \int_0^{2\pi} d\phi \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho \exp(+i\phi)}{R - \rho \exp(+i\phi)} + \frac{\rho \exp(-i\phi)}{R - \rho \exp(-i\phi)} \right) \right] \\
 = & 2\pi + \frac{i\rho}{2} \left(\ln(R - \rho \exp(+i\phi)) - \ln(R - \rho \exp(-i\phi)) \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 = & 2\pi
 \end{aligned}$$

car la variation de l'argument de $R - \rho \exp(+i\phi)$ et de $R - \rho \exp(-i\phi)$ lorsque ϕ varie de 0 à 2π est nulle puisque $\rho < R$.

Exercice 3.4

Quelle est la force par unité de longueur avec laquelle s'attirent ou se repoussent deux fils parallèles distants de $0.5 [cm]$, lorsqu'ils sont parcourus par un courant dont l'intensité est de $10.0 [A]$?

Solution :

Il faut faire appel à l'avant dernière formule établie à la fin de la sous-section (3.2.2) à savoir

$$\frac{d\mathbf{F}_2}{ds_2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{\boldsymbol{\rho}_{21}}{\|\boldsymbol{\rho}_{12}\|^2}$$

Dans le problème $|I_1| = |I_2| = 10.0 [A]$ et $\|\boldsymbol{\rho}_{12}\| = 5.0 \times 10^{-3} [m]$. par conséquent

$$\left\| \frac{d\mathbf{F}_2}{ds_2} \right\| = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} [Vs/Am] (10.0)^2 [A^2]}{2\pi \cdot 5.0 \times 10^{-3} [m]} = 0.4 \times 10^{-2} [N]$$

Exercice 3.5

Une sphère de rayon R qui porte une distribution superficielle uniforme de charge électrique de densité superficielle ω est en rotation autour d'un diamètre avec une fréquence ν . Quelles forces subit cette sphère en rotation lorsqu'elle est en présence d'un champ d'induction extérieur et uniforme $\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \check{\mathbf{B}}_0$ quel que soit \mathbf{x} ?

Solution :

On choisit un système de coordonnées cartésiennes dont l'origine O coïncide le centre de la sphère et tel que l'axe Ox^3 coïncide avec l'axe de rotation. Soient (r, θ, ϕ) les coordonnées sphériques associés à ce système de coordonnées.

La densité de courant électrique de surface $\Sigma(\theta, \phi)$ a pour expression

$$\Sigma(\theta, \phi) = R \, 2\pi \, \nu \, \omega \, \sin \theta \left(-\sin \phi \, \mathbf{e}_1 + \cos \phi \, \mathbf{e}_2 \right)$$

Par conséquent la force magnétique totale subie par la sphère s'écrit

$$\mathbf{F} = \int_0^\pi R \, d\theta \int_0^{2\pi} R \, \sin \theta \, d\phi \, \Sigma(\theta, \phi) \wedge \check{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{0}$$

Et cette force est manifestement nulle puisque

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi R \, d\theta \int_0^{2\pi} R \, \sin \theta \, d\phi \, \Sigma(\theta, \phi) \\ = & R \, 2\pi \, \nu \, \omega \, R^2 \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^2 \int_0^{2\pi} d\phi \left(-\sin \phi \, \mathbf{e}_1 + \cos \phi \, \mathbf{e}_2 \right) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Exercice 3.6

Quel est le champ d'induction produit par un courant uniforme de densité de courant $\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{j}_0$ parcourant un conducteur rectiligne infini de section circulaire de rayon R ?

Solution :

On choisit des coordonnées cartésiennes dont l'axe Ox^3 coïncide avec l'axe du cylindre et cet axe est orienté dans le sens du courant, autrement dit $\mathbf{j}_0 = j_0 \, \mathbf{e}_3$

Si l'on postule la symétrie cylindrique du champ magnétique alors, selon les coordonnées cylindriques associées et selon la loi d'Ampère (3.22)

$$\check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = \check{H}_\phi(\rho) \, \mathbf{e}_\phi$$

où

$$\check{H}_\phi(\rho) = \frac{j_0}{2} \begin{cases} \rho & \text{si } \rho \leq R \\ R^2/\rho & \text{si } \rho \geq R \end{cases}$$

Autrement, sans présupposer la symétrie cylindrique, d'après l'expression (3.15) il vient l'expression

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\|\mathbf{y}_\perp\| \leq R} \frac{\mathbf{j}_0 \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} dV(\mathbf{y}) \\ &= \frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \int_{\|\mathbf{y}_\perp\| \leq R} \frac{(x^1 - y^1) \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + (x^2 - y^2) \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2}{\left(\sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2}\right)^3} dV(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Dans cette expression $\mathbf{y}_\perp = y^1 \, \mathbf{e}_1 + y^2 \, \mathbf{e}_2$. L'intégration relative à la variable y^3 de $-\infty$ à $+\infty$ est aisée à effectuer. Voir la solution de l'exercice l'exercice 3.3. On parvient alors à l'expression

$$\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 j_0}{2\pi} \int_{\|\mathbf{y}_\perp\| \leq R} \frac{(x^1 - y^1) \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + (x^2 - y^2) \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2}{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2} dy^1 dy^2$$

Centrons maintenant notre attention sur l'intégrale précédente. En coordonnées cylindriques

$$x^1 = \rho \cos \phi \quad , \quad x^2 = \rho \sin \phi \quad , \quad y^1 = r \cos \psi \quad \text{et} \quad y^2 = r \sin \psi$$

En termes de ces dernières variables

$$\begin{aligned} & \int_{\|\mathbf{y}_\perp\| \leq R} \frac{x^1 - y^1}{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2} dy^1 dy^2 \\ &= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\psi \frac{\rho \cos \phi - r \cos \psi}{\rho^2 + r^2 - 2 \rho r \cos(\psi - \phi)} \\ &= \int_0^R r dr \int_{-\phi}^{2\pi - \phi} d\alpha \frac{\rho \cos \phi - r (\cos \alpha \cos \phi - \sin \alpha \sin \phi)}{\rho^2 + r^2 - 2 \rho r \cos \alpha} \\ &= \int_0^R r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \frac{(\rho - r \cos \alpha) \cos \phi}{\rho^2 + r^2 - 2 \rho r \cos \alpha} \end{aligned}$$

La seconde égalité ci-dessus découle du changement de variable d'intégration de ψ en $\alpha + \phi$. Dans la troisième égalité le changement des limites d'intégration est permis par la périodicité de période 2π de l'intégrand par rapport à la variable α . En outre, il a été tenu compte du fait que le terme impair en $\sin \alpha$ de l'intégrand apporte une contribution nulle à l'intégrale. Or en vertu la dernière égalité qui figure dans la solution de l'exercice 3.3. où maintenant ρ joue le rôle de R et r joue le rôle de ρ et compte tenu de la périodicité de l'intégrand par rapport à la variable α il vient

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \frac{\rho - r \cos \alpha}{\rho^2 + r^2 - 2 \rho r \cos \alpha} = \frac{2\pi}{\rho} \begin{cases} 1 & \text{si } \rho > r \\ 0 & \text{si } \rho < r \end{cases}$$

Par conséquent

$$\int_{\|\mathbf{y}_\perp\| \leq R} \frac{x^1 - y^1}{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2} dy^1 dy^2 = \frac{2\pi \cos \phi}{\rho} \int_0^R r dr \begin{cases} 1 & \text{si } \rho > r \\ 0 & \text{si } \rho < r \end{cases}$$

Finalement

$$\int_{\|\mathbf{y}_\perp\| \leq R} \frac{x^1 - y^1}{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2} dy^1 dy^2 = \frac{\pi \cos \phi}{\rho} \begin{cases} \rho^2 & \text{si } \rho < R \\ R^2 & \text{si } \rho > R \end{cases}$$

Quant à la contribution du second terme de l'intégrand qui figure dans l'expression du champ d'induction $\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ l'intégrale

$$\int_{\|\mathbf{y}_\perp\| \leq R} \frac{x^2 - y^2}{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2} dy^1 dy^2 = \frac{\pi \sin \phi}{\rho} \begin{cases} \rho^2 & \text{si } \rho < R \\ R^2 & \text{si } \rho > R \end{cases}$$

elle est similaire à celle qui vient d'être évaluée, à l'échange du rôle des variables x^1 et x^2 près. En conclusion

$$\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 j_0}{2\pi} \frac{\pi}{\rho} \mathbf{e}_3 \wedge [\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2] \begin{cases} \rho^2 & \text{si } \rho < R \\ R^2 & \text{si } \rho > R \end{cases}$$

Rappelons enfin que

$$\mathbf{e}_3 \wedge [\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2] = \check{\mathbf{e}}_\phi(\rho, \phi, z)$$

Ce dernier résultat coïncide donc bien avec l'expression obtenue initialement en présupposant la symétrie cylindrique du champ magnétique.

Exercice 3.7

Une spire circulaire filiforme de rayon R est parcourue par un courant permanent d'intensité I . Elle est située dans le plan Ox^1x^2 et le centre de cette spire coïncide avec l'origine du système de coordonnées cartésiennes $Ox^1x^2x^3$ orienté à droite. Soit (ρ, ϕ, z) le système de coordonnées cylindriques correspondant. Montrer qu'en tout point (ρ, ϕ, z) le potentiel-vecteur qui décrit le champ d'induction produit par la spire est de la forme $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = A_\phi(\rho, \phi, z) \mathbf{e}_\phi(\rho, \phi)$ où :

$$A_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{\mu_0 R I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2 - 2 R \rho \cos \alpha}}$$

Solution :

Partant de la formule (3.33), où maintenant

$$\mathbf{x} = \rho (\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2) + z \mathbf{e}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = R (\cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2)$$

Dans ces conditions

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{IR (-\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2) d\psi}{\|\mathbf{x} - R (\cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2)\|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{IR (-\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2) d\psi}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + R^2 - 2 \rho R \cos(\psi - \phi)}} \end{aligned}$$

Dans l'expression qui précède adoptons $\alpha = \psi - \phi$ comme variable d'intégration au lieu de ψ . Il vient

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0 R I}{4\pi} \int_{-\phi}^{2\pi-\phi} \frac{(-\sin(\alpha+\phi) \mathbf{e}_1 + \cos(\alpha+\phi) \mathbf{e}_2) d\alpha}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \alpha}} \\
&= \frac{\mu_0 R I}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \alpha}} \\
&\times \left[-(\sin \alpha \cos \phi + \cos \alpha \sin \phi) \mathbf{e}_1 + (\cos \alpha \cos \phi - \sin \alpha \sin \phi) \mathbf{e}_2 \right] \\
&= \frac{\mu_0 R I}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{[-\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2] \cos \alpha d\alpha}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \alpha}}
\end{aligned}$$

La première égalité ci-dessus découle des formules bien connues de trigonométrie. Quant au changement des limites d'intégration il est permis par la périodicité de période 2π de l'intégrant par rapport à la variable α . Enfin, la dernière égalité résulte du fait que les termes de l'intégrant qui sont des fonctions impaires de α apportent une contribution nulle à l'intégrale. Ensuite il suffit de remarquer que

$$\mathbf{e}_\phi(\rho, \phi, z) = -\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2$$

Enfin, puisque l'intégrant est une fonction paire de l'angle α , il vient l'expression cherchée

$$A_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{\mu_0 R I}{2\pi} \int_0^{+\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \alpha}}$$

Exercice 3.8

Calculer le potentiel-vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ des courants produits par une sphère de rayon R portant une charge électrique superficielle uniforme de densité ω et tournant autour d'un diamètre avec une fréquence ν . Quel est le champ d'induction $\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ à l'intérieur de cette sphère ?

Indication : Commencer par établir l'égalité

$$\int_{\partial B(\mathbf{0}, R)} \frac{d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \frac{4\pi R^3}{3} \begin{cases} \mathbf{x}/R^3 & \text{si } \|\mathbf{x}\| \leq R \\ \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|^3 & \text{si } \|\mathbf{x}\| \geq R \end{cases}$$

Ensuite utiliser ce résultat pour évaluer le potentiel-vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ dans la situation décrite ci-dessus.

Solution :

On choisit le système de coordonnées cartésiennes dont l'origine O coïncide avec le centre de la sphère et qui est tel que l'axe Ox^3 coïncide avec l'axe de rotation de cette dernière.

Pour établir l'égalité proposée on peut, compte tenu de la symétrie sphérique de l'expression, convenir que $\mathbf{x} = z \mathbf{e}_3$. Faisant usage des coordonnées sphériques associées (r, θ, ϕ)

$$\mathbf{y} = R (\sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3)$$

il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B(\mathbf{0}, R)} \frac{d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \\ &= \int_0^\pi R^2 \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2 z R \cos \theta}} \\ &= 2\pi R^2 \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_3}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2 z R \cos \theta}} \\ &= 2\pi R^2 \int_{-1}^1 \frac{u \, du}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2 z R u}} \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} & 2\pi R^2 \int_{-1}^1 \frac{u \, du}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2 z R u}} \\ &= \frac{-2\pi}{3 z^2} (z^2 + R^2 + z R u) \sqrt{z^2 + R^2 - 2 z R u} \Big|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{4\pi}{3 z^2} \begin{cases} z^3 & \text{si } z \geq R \\ R^3 & \text{si } z \leq R \end{cases} \end{aligned}$$

Ce résultat préliminaire établi venons-en à la détermination du potentiel-vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Dans ce but remarquons que la densité de courant $\boldsymbol{\Sigma}(\theta, \phi)$ du courant superficiel est de la forme

$$\boldsymbol{\Sigma}(\theta, \phi) = 2\pi\nu R \sin \theta \, \boldsymbol{\omega} (-\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2) = 2\pi\nu R \sin \theta \, \boldsymbol{\omega} \mathbf{e}_\phi(R, \theta, \phi)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\Sigma}(\theta, \phi) &= \boldsymbol{\Sigma}(\theta, \phi) \, d\sigma(\theta, \phi) = (2\pi\nu R) \sin \theta \, \boldsymbol{\omega} \, d\sigma(\theta, \phi) \mathbf{e}_\phi(R, \theta, \phi) \\ &= (2\pi\nu R) \boldsymbol{\omega} \, d\sigma(\theta, \phi) \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_r(R, \theta, \phi) = (2\pi\nu R) \boldsymbol{\omega} \mathbf{e}_3 \wedge d\boldsymbol{\sigma}(R, \theta, \phi) \end{aligned}$$

Dans ces conditions, compte tenu de l'expression (3.32) adaptée au courant de surface, le potentiel-vecteur est donné par l'expression

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{B(R, \mathbf{0})} \frac{\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{y}) \, d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \frac{\mu_0}{4\pi} (2\pi\nu R) \boldsymbol{\omega} \int_{B(R, \mathbf{0})} \frac{\mathbf{e}_3 \wedge d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \\ &= \mu_0 (2\pi\nu R) \boldsymbol{\omega} \frac{R^3}{3} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{x} \begin{cases} 1/R^3 & \text{si } r \leq R \\ 1/r^3 & \text{si } r \geq R \end{cases} \\ &= \mu_0 2\pi\nu R \boldsymbol{\omega} \frac{R^3}{3} \sin \theta \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi) \begin{cases} r/R^3 & \text{si } r \leq R \\ 1/r^2 & \text{si } r \geq R \end{cases} \end{aligned}$$

où $r = \|\mathbf{x}\|$.

Il suit du résultat qui précède qu'à l'intérieur de la sphère

$$A_\phi(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 2\pi\nu R \omega}{3} r \sin \theta \quad , \quad A_\theta(r, \theta, \phi) = 0 \quad \text{et} \quad A_r(r, \theta, \phi) = 0$$

Dans ces conditions il résulte des formules (C.41) que les composantes du champ d'induction sont fournies par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} B_r(r, \theta, \phi) &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial r \sin \theta A_\phi(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial r A_\theta(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} \right) \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\mu_0 2\pi\nu R \omega}{3} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta)^2 = \frac{\mu_0 4\pi\nu R \omega}{3} \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_\theta(r, \theta, \phi) &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_r(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} - \frac{\partial r \sin \theta A_\phi(r, \theta, \phi)}{\partial r} \right) \\ &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\mu_0 2\pi\nu R \omega}{3} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta)^2 = -\frac{\mu_0 4\pi\nu R \omega}{3} \sin \theta \end{aligned}$$

$$B_\phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta(r, \theta, \phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \right) = 0$$

En résumé, à l'intérieur de la sphère, le champ d'induction est un champ uniforme et orienté selon l'axe Ox^3 . Plus précisément

$$\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 2\pi\nu R \omega}{3} \check{\mathbf{e}}_3$$

Exercice 3.9

Déterminer le moment dipolaire magnétique $\check{\mathbf{m}}$ des courants de l'exercice 3.8 qui précède. Donner ensuite l'approximation dipolaire correspondante (3.37) du potentiel-vecteur qui en découle à l'extérieur de la sphère. Comparer ce résultat avec la solution exacte de l'exercice précédent. Que peut-on en conclure ?

Solution :

Partons de la définition (3.36) adaptée à la situation présente. Il vient

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{m}} &= \frac{1}{2} \int_{\overline{B(\mathbf{0}, R)}} \mathbf{y} \wedge \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{y}) \, d\sigma(\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi R^2 \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (2\pi\nu R) \sin \theta \omega R \mathbf{e}_r(R, \theta, \phi) \wedge \mathbf{e}_\phi(R, \theta, \phi) \\ &= \frac{1}{2} R^3 (2\pi\nu R) \omega \int_0^\pi (\sin \theta)^2 \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &\quad \times (\sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3) \wedge (-\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2) \\ &= \frac{1}{2} R^3 (2\pi\nu R) \omega \int_0^\pi (\sin \theta)^2 \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &\quad \times (-\cos \theta \cos \phi \check{\mathbf{e}}_1 - \cos \theta \sin \phi \check{\mathbf{e}}_2 + \sin \theta \check{\mathbf{e}}_3) \\ &= \pi R^3 (2\pi\nu R) \omega \int_0^\pi (\sin \theta)^3 \, d\theta \check{\mathbf{e}}_3 \end{aligned}$$

Finalement

$$\check{\mathbf{m}} = \frac{4\pi R^3}{3} (2\pi\nu R) \omega \check{\mathbf{e}}_3$$

Ensuite, grâce à l'expression (3.37) adaptée au cas d'un dipôle magnétique ponctuel, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0 \check{\mathbf{m}} \wedge \mathbf{x}}{4\pi \|\mathbf{x}\|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4\pi R^3}{3} (2\pi\nu R) \omega \frac{\check{\mathbf{e}}_3 \wedge \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi)}{\|\mathbf{x}\|^2} \\ &= \mu_0 \frac{R^3}{3} (2\pi\nu R) \omega \frac{\sin\theta \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi)}{\|\mathbf{x}\|^2} \end{aligned}$$

En conclusion, l'expression exacte de l'exercice (3.8) pour le potentiel-vecteur lorsque $\|\mathbf{x}\| > R$, coïncide avec le potentiel associé au dipôle magnétique généré par la sphère uniformément chargée en rotation. En d'autres termes le potentiel-vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ généré par la sphère uniformément chargée en rotation n'a pas de composantes quadripolaires, ni octupolaires etc.

Exercice 3.10

On considère une distribution de courants stationnaires conservatifs localisée dans une boule $B(\mathbf{0}, R)$ et décrite par une densité de courant

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \notin B(\mathbf{0}, R).$$

Etablir l'égalité

$$\int_{B(\mathbf{0}, R)} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{8\pi}{3} \check{\mathbf{m}}$$

où $\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ et $\check{\mathbf{m}}$ désignent respectivement le champ d'induction et le moment dipolaire magnétique correspondant à cette distribution de courants. Vérifier ensuite la relation précédente dans le cas particulier de l'exercice 3.8.

Indications : Exprimer $\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ à partir du potentiel-vecteur puis appliquer la formule (2.78). Ensuite, faire usage de l'expression mentionnée dans les indications qui accompagnent l'énoncé de l'exercice 3.8.

Solution :

Commençons par observer, vu la formule (2.78) et vu l'expression (3.32), que

$$\begin{aligned} \int_{B(\mathbf{0}, R)} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) &= \int_{B(\mathbf{0}, R)} \check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{0}, R)} d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{0}, R)} d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \wedge \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{B(\mathbf{0}, R)} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dV(\mathbf{y}) \right] \end{aligned}$$

Or selon les résultats de l'exercice 3.8, lorsque $\|\mathbf{y}\| < R$, on dispose de l'égalité

$$\int_{\partial B(\mathbf{0}, R)} \frac{d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = \frac{4\pi}{3} \mathbf{y}$$

Par conséquent l'égalité qui suit découle de l'expression (3.36)

$$\int_{B(\mathbf{0}, R)} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) = \frac{4\pi}{3} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{B(\mathbf{0}, R)} \mathbf{y} \wedge \mathbf{j}(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}) = \frac{2}{3} \mu_0 \check{\mathbf{m}}$$

Exercice 3.11

On considère une distribution de courants stationnaires conservatifs de densité $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ localisée à distance finie à l'extérieur d'une boule de rayon R centrée à l'origine. Autrement dit

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad , \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \overline{B(\mathbf{0}, R)}.$$

Etablir l'égalité,

$$\int_{B(\mathbf{0}, R)} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) = \frac{4\pi R^3}{3} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{0})$$

Indication : Faire usage de la formule (3.15) puis échanger l'ordre des intégrations.

Solution :

Partant de l'expression (3.15) on peut écrire l'égalité

$$\int_{B(\mathbf{0}, R)} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) = \int_{B(\mathbf{0}, R)} dV(\mathbf{x}) \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{C}_{B(\mathbf{0}, R)}} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} dV(\mathbf{y})$$

Or lorsque $\|\mathbf{y}\| \geq R$,

$$\begin{aligned} \int_{B(\mathbf{0}, R)} dV(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} &= \mathbf{grad}_{\mathbf{y}} \int_{B(\mathbf{0}, R)} \frac{dV(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \\ &= \mathbf{grad}_{\mathbf{y}} \left(\frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{\|\mathbf{y}\|} \right) = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{-\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^3} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_{B(\mathbf{0}, R)} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{C}_{B(\mathbf{0}, R)}} \frac{4\pi R^3}{3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y}) \wedge (-\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|^3} dV(\mathbf{y}) = \frac{4\pi R^3}{3} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{0})$$

Exercice 3.12

Etudier le mouvement d'une particule de masse M et de charge électrique Q sous l'action des forces coulombiennes et des forces de Laplace lorsqu'elle est mise en présence d'un champ électrique \mathbf{E}_0 et d'un champ d'induction $\check{\mathbf{B}}_0$ tous deux statiques et uniformes.

Solution :

L'équation qui gouverne l'évolution de la particule chargée s'écrit

$$M \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = Q \left(\mathbf{E}_0 + \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \wedge \check{\mathbf{B}}_0 \right)$$

Pour la suite il convient de poser

$$\mathbf{a} = \frac{Q \mathbf{E}_0}{M} \quad \text{et} \quad \check{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{Q \check{\mathbf{B}}_0}{M}$$

Pour la position initiale de la particule il n'est pas restrictif de supposer que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Quant à la vitesse initiale notons-la $d\mathbf{x}(0)/dt = \mathbf{v}_0$. Il découle de l'intégration de l'équation différentielle précédente que

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} t + \check{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x}(t)$$

Il n'est pas difficile de vérifier que cette équation différentielle possède une solution particulière de la forme

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{a}_{\parallel} \frac{t^2}{2} + \left(\frac{\check{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{a}_{\perp}}{\|\check{\boldsymbol{\omega}}\|^2} + \mathbf{v}_{0\parallel} \right) t + \frac{\check{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{v}_{0\perp} + \mathbf{a}_{\perp}}{\|\check{\boldsymbol{\omega}}\|^2}$$

où

$$\mathbf{v}_{0\perp} = \mathbf{v}_0 - \frac{(\check{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{v}_0) \check{\boldsymbol{\omega}}}{\|\check{\boldsymbol{\omega}}\|^2} = \frac{(\check{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{v}_0) \wedge \check{\boldsymbol{\omega}}}{\|\check{\boldsymbol{\omega}}\|^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{0\parallel} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0\perp}$$

puis

$$\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \frac{(\check{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{a}) \check{\boldsymbol{\omega}}}{\|\check{\boldsymbol{\omega}}\|^2} = \frac{(\check{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{a}) \wedge \check{\boldsymbol{\omega}}}{\|\check{\boldsymbol{\omega}}\|^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\perp}$$

Pour déterminer la solution générale de l'équation différentielle qui précède posons

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{y}(t)$$

La fonction $\mathbf{y}(t)$ est par conséquent solution de l'équation

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \check{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{y}(t)$$

avec pour condition initiale

$$\mathbf{y}(0) = -\mathbf{x}_0(0) = -\frac{\check{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{v}_{0\perp} + \mathbf{a}_{\perp}}{\|\check{\boldsymbol{\omega}}\|^2}$$

L'équation différentielle ci-dessus montre que la solution $\mathbf{y}(t)$ est donnée, à l'instant t , par l'action d'une rotation d'angle $\|\check{\boldsymbol{\omega}}\|t$ autour de l'axe dont l'orientation est définie par le vecteur axial $\check{\boldsymbol{\omega}}$. Notons $R(\check{\boldsymbol{\omega}}t)$ la matrice de rotation correspondante. Alors

$$\mathbf{y}(t) = R(\check{\boldsymbol{\omega}}t) \mathbf{y}(0) = -R(\check{\boldsymbol{\omega}}t) \frac{\check{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{v}_{0\perp} + \mathbf{a}_{\perp}}{\|\check{\boldsymbol{\omega}}\|^2}$$

Pour vérifier le résultat qui précède il suffit de considérer la situation dans laquelle le champ d'induction, donc le vecteur axial $\check{\boldsymbol{\omega}}$, est orienté selon l'axe Ox^3 . Le système d'équations différentielles prend alors la forme que voici.

$$\begin{aligned} \frac{dy^1(t)}{dt} &= -\check{\omega} y^2(t) \\ \frac{dy^2(t)}{dt} &= +\check{\omega} y^1(t) \\ \frac{dy^3(t)}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

L'intégration de ce système d'équations est élémentaire. La solution de ce dernier s'écrit

$$\begin{aligned} y^1(t) &= \cos(\check{\omega}^3 t) y^1(0) - \sin(\check{\omega}^3 t) y^2(0) \\ y^2(t) &= \sin(\check{\omega}^3 t) y^1(0) + \cos(\check{\omega}^3 t) y^2(0) \\ y^3(t) &= y^3(0) \end{aligned}$$

En résumé, compte tenu des résultats qui précèdent, le mouvement le plus générale de la particule massive électriquement chargée est décrit par la fonction

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_{\parallel} \frac{t^2}{2} + \left(\frac{\check{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{a}_{\perp}}{\|\check{\boldsymbol{\omega}}\|^2} + \mathbf{v}_{0\parallel} \right) t + \frac{\check{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{v}_{0\perp} + \mathbf{a}_{\perp}}{\|\check{\boldsymbol{\omega}}\|^2} - R(\check{\boldsymbol{\omega}}t) \frac{\check{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{v}_{0\perp} + \mathbf{a}_{\perp}}{\|\check{\boldsymbol{\omega}}\|^2}$$

Autrement dit, le mouvement de la particule chargée est constitué d'un mouvement uniformément accéléré dans la direction fixée par champ d'induction $\check{\mathbf{B}}_0$ et de la composition d'un mouvement de translation uniforme de vitesse $\check{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{a}_{\perp} / \|\check{\boldsymbol{\omega}}\|^2 + \mathbf{v}_{0\parallel}$ accompagné d'un mouvement de rotation, de vitesse angulaire $\|\check{\boldsymbol{\omega}}\|$, autour de la direction fixée par le champ d'induction.

Exercice 3.13

Montrer que la divergence du potentiel-vecteur $\mathbf{A}_M(\mathbf{x})$, donné par l'expression

$$\mathbf{A}_M(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\check{\mathbf{M}}(\mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} dV(\mathbf{y})$$

est identiquement nulle.

Solution :

En effet, compte tenu de la relation (2.75)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A}_M(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left(\frac{\check{\mathbf{M}}(\mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right) dV(\mathbf{y}) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \check{\mathbf{M}}(\mathbf{y}) \cdot \check{\operatorname{rot}}_{\mathbf{x}} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right) dV(\mathbf{y}) = 0 \end{aligned}$$

Exercice 3.14★

La polarisation \mathbf{P} d'un diélectrique isotrope et stationnaire placé dans un champ électrique électrostatique \mathbf{E} est donnée par la formule

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}$$

Si chaque élément du diélectrique mis en présence d'un champ d'induction est déplacé avec une vitesse \mathbf{v} , la polarisation du diélectrique prend la valeur

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \check{\mathbf{B}})$$

si l'on convient de négliger les contributions d'ordre $1/c$ et au-delà.

Un cylindre diélectrique tourne autour de l'axe de symétrie avec une vitesse angulaire constante $\check{\omega}$, dans un champ magnétostatique uniforme $\check{\mathbf{B}}_0$. Ce champ est parallèle à l'axe du cylindre. Les vecteurs axiaux $\check{\omega}$ et $\check{\mathbf{B}}_0$ sont donc de même orientation que le vecteur axial $\check{\mathbf{e}}_z$. Déterminer la polarisation du cylindre, la densité superficielle de charge électrique fictive qui apparaît sur la surface du cylindre et le potentiel électrostatique en des points extérieurs et intérieurs à ce dernier cylindre.

Solution :

Adoptons un système de coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) dont l'axe Oz coïncide avec l'axe du cylindre diélectrique. Le vecteur vitesse locale au point \mathbf{x} du cylindre en rotation a pour expression $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \check{\omega} \wedge \mathbf{x}$. Par conséquent la seule composante non-nulle de la vitesse au point (ρ, ϕ, z) est la composante $v_{\phi}(\rho) = \|\check{\omega}\| \rho$. La polarisation électrique au point \mathbf{x} est donnée par expression

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\rho, \phi, z) &= (\varepsilon - \varepsilon_0) \left[\mathbf{E}(\rho, \phi, z) + (\check{\omega} \wedge \mathbf{x}) \wedge \check{\mathbf{B}}_0 \right] \\ &= (\varepsilon - \varepsilon_0) \left[\mathbf{E}(\rho, \phi, z) - (\check{\omega} \cdot \check{\mathbf{B}}_0) \rho \mathbf{e}_{\rho}(\rho, \phi, z) \right] \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{x}) &= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\rho, \phi, z) + \mathbf{P}(\rho, \phi, z) \\ &= \varepsilon \mathbf{E}(\rho, \phi, z) - (\varepsilon - \varepsilon_0) (\check{\omega} \cdot \check{\mathbf{B}}_0) \rho \mathbf{e}_{\rho}(\rho, \phi, z) \end{aligned}$$

Or $\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{x}) = 0$ et par conséquent, compte tenu de la formule (C.29),

$$\begin{aligned} \text{div } (\varepsilon \mathbf{E}(\rho, \phi, z)) &= (\varepsilon - \varepsilon_0) (\check{\omega} \cdot \check{\mathbf{B}}_0) \text{div } (\rho \mathbf{e}_\rho(\rho, \phi, z)) \\ &= 2 (\varepsilon - \varepsilon_0) (\check{\omega} \cdot \check{\mathbf{B}}_0) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = -\mathbf{grad } \Phi(\rho, \phi, z)$$

où

$$\Delta \Phi(\rho, \phi, z) = \begin{cases} -2 ((\varepsilon - \varepsilon_0)/\varepsilon) (\check{\omega} \cdot \check{\mathbf{B}}_0) & \text{si } \rho \leq R \\ 0 & \text{si } \rho > R \end{cases}$$

Il convient de chercher un potentiel électrique présentant la symétrie cylindrique, plus précisément un potentiel électrique indépendant des variables ϕ et z . Dans ces conditions la seule composante non-nulle du champ électrique est la composante $E_\rho(\rho, \phi, z)$. Ainsi, compte tenu de la formule (C.31), à l'intérieur du cylindre

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \Phi(\rho, \phi, z)}{\partial \rho} = -2 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \check{\omega} \cdot \check{\mathbf{B}}_0$$

La solution générale de cette dernière équation s'écrit

$$\Phi(\rho, \phi, z) = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} (\check{\omega} \cdot \check{\mathbf{B}}_0) \frac{\rho^2}{2} + C_1 \ln \rho + C_2$$

Dans cette expression les symboles C_1 et C_2 désignent des constantes d'intégration. Or la constante C_1 doit être nulle puisque, en vertu du théorème de Gauss, le champ de déplacement électrique $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ est partout nul. En effet, dans ces conditions

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \varepsilon \mathbf{E}(\rho, \phi, z) - (\varepsilon - \varepsilon_0) (\check{\omega} \cdot \check{\mathbf{B}}_0) \rho \mathbf{e}_\rho(\rho, \phi, z) = 0$$

et par conséquent

$$E_\rho(\rho, \phi, z) = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} (\check{\omega} \cdot \check{\mathbf{B}}_0) \rho = -\frac{\partial \Phi(\rho, \phi, z)}{\partial \rho}$$

Finalement la continuité de la composante $D_\rho(\rho, \phi, z)$ du champ de déplacement électrique impose que cette dernière composante est aussi nulle à l'extérieur du cylindre. Par voie de conséquence, à l'extérieur du cylindre, la composante $E_\rho(\rho, \phi, z)$ du champ électrique est identiquement nulle puisque $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x})$. Autrement dit, toujours à l'extérieur du cylindre, le potentiel électrique est constant, donc nulle selon nos conventions. La continuité du potentiel à la surface du cylindre nous amène à écrire l'expression finale que voici pour ce potentiel électrique.

$$\Phi(\rho, \phi, z) = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} (\check{\omega} \cdot \check{\mathbf{B}}_0) \frac{\rho^2 - R^2}{2}, \quad \forall \rho \leq R$$

et

$$\Phi(\rho, \phi, z) = 0, \quad \forall \rho \geq R$$

Vu la définition (2.130) la densité de charge électrique virtuelle dans le cylindre vaut

$$q_P(\mathbf{x}) \equiv -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \operatorname{div} (\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x})) = 2 \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} (\check{\omega} \cdot \check{\mathbf{B}}_0)$$

et sur la surface de ce dernier cylindre la densité superficielle de charge électrique virtuelle s'écrit,

$$\begin{aligned} \omega_P(R, \phi, z) &= \mathbf{n}(R, \phi, z) \cdot \mathbf{P}(R, \phi, z) = -\varepsilon_0 \mathbf{n}(R, \phi, z) \cdot \mathbf{E}(R, \phi, z) \\ &= -\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} (\check{\omega} \cdot \check{\mathbf{B}}_0) R \end{aligned}$$

vu la définition (2.131). En résumé, il apparaît à l'intérieur du cylindre diélectrique en rotation un champ électrique radial indépendant des variables ϕ et z . Ce champ est "écrané" à la surface du cylindre diélectrique et s'annule à l'extérieur.

Exercice 3.15

Deux courants filiformes circulaires de même rayon R et d'intensités I_1 et I_2 sont situés dans des plans parallèles séparés par une distance a . Les centres de ces courants circulaires sont situés sur le même axe orthogonal aux deux plans et dont l'origine O est située à mi-chemin. On demande de déterminer l'expression de la force que ces courants exercent l'un sur l'autre. Discuter les cas où $R \ll a$ et $a \ll R$.

Solution :

Soient Γ_1 et Γ_2 les deux cercles formés par les courants filiformes. Partant des expressions (3.4) et (3.6) il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \int_{\Gamma_1} I_1 d\mathbf{x}_1 \wedge \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}_1) \\ &= \int_{\Gamma_1} I_1 d\mathbf{x}_1 \wedge \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{I_2 d\mathbf{x}_2 \wedge (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3} \right] \end{aligned}$$

Adoptons un système de coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) dont l'axe Oz passe par le centre des cercles Γ_1 et Γ_2 . Dans ces conditions

$$\mathbf{x}_1 = R (\cos \phi_1 \mathbf{e}_1 + \sin \phi_1 \mathbf{e}_2) + \frac{a}{2} \mathbf{e}_3$$

et

$$d\mathbf{x}_1 = R (-\sin \phi_1 \mathbf{e}_1 + \cos \phi_1 \mathbf{e}_2) d\phi_1$$

puis

$$\mathbf{x}_2 = R (\cos \phi_2 \mathbf{e}_1 + \sin \phi_2 \mathbf{e}_2) - \frac{a}{2} \mathbf{e}_3$$

et

$$d\mathbf{x}_2 = R (-\sin \phi_2 \mathbf{e}_1 + \cos \phi_2 \mathbf{e}_2) d\phi_2$$

Après remplacement des variables d'intégration de l'expression précédente de la force \mathbf{F}_{12} par les variables angulaires ϕ_1 et ϕ_2 on parvient à l'expression

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\phi_2 \\ &\times \frac{R^3 (1 - \cos(\phi_1 - \phi_2)) (\cos \phi_1 \mathbf{e}_1 + \sin \phi_1 \mathbf{e}_2) - R^2 a \cos(\phi_1 - \phi_2) \mathbf{e}_3}{(\sqrt{2} R^2 + a^2 - 2 R^2 \cos(\phi_1 - \phi_2))^3} \end{aligned}$$

A la vue de ce dernier résultat procédons encore au changement de variable d'intégration de ϕ_2 en $\alpha = \phi_2 - \phi_1$. Compte tenu de la périodicité, de période 2π , de l'intégrand ci-dessus par rapport à la variable ϕ_2 on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{2\pi} d\alpha \\ &\times \frac{R^3 (1 - \cos \alpha) (\cos \phi_1 \mathbf{e}_1 + \sin \phi_1 \mathbf{e}_2) - R^2 a \cos \alpha \mathbf{e}_3}{(\sqrt{2} R^2 + a^2 - 2 R^2 \cos \alpha)^3} \end{aligned}$$

L'intégration relative à la variable ϕ_1 peut être aisément effectuée. Il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \frac{-\mu_0 I_1 I_2 R^2 a}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{(\sqrt{2} R^2 + a^2 - 2 R^2 \cos \alpha)^3} \mathbf{e}_3 \\ &= \frac{-\mu_0 I_1 I_2 a}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{(\sqrt{2} (1 - \cos \alpha) + (a/R)^2)^3} \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

On constate ainsi que lorsque les orientations des cercles Γ_1 et Γ_2 sont équivalentes les courants filiformes s'attirent si les intensités des courants sont de même signes et se repoussent dans le cas contraire.

Considérons maintenant la situation particulière où $R \ll a$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} \sqrt{2 (1 - \cos \alpha) + \left(\frac{a}{R}\right)^2} &= \frac{a}{R} \sqrt{1 + 2\left(\frac{R}{a}\right)^2 (1 - \cos \alpha)} \\ &\approx \frac{a}{R} \left(1 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 (1 - \cos \alpha)\right) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\left(\sqrt{2(1 - \cos \alpha) + \left(\frac{a}{R}\right)^2} \right)^3 \approx \frac{a^3}{R^3} \left(1 + 3\left(\frac{R}{a}\right)^2 (1 - \cos \alpha) \right)$$

Dans ces conditions

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \frac{-\mu_0 I_1 I_2}{2} \frac{a}{R} \int_0^{2\pi} \cos \alpha \, d\alpha \left(\frac{R}{a}\right)^3 \left(1 - 3\left(\frac{R}{a}\right)^2 (1 - \cos \alpha) \right) \mathbf{e}_3 \\ &= \frac{-\mu_0 I_1 I_2}{2} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\left(\frac{R}{a}\right)^2 (1 - \cos \alpha) \right) \cos \alpha \, d\alpha \mathbf{e}_3 \\ &= \frac{-3\mu_0 I_1 I_2}{2} \left(\frac{R}{a}\right)^4 \int_0^{2\pi} (\cos \alpha)^2 \, d\alpha \mathbf{e}_3 = \frac{-3\pi \mu_0 I_1 I_2}{2} \frac{R^4}{a^4} \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Considérons finalement l'autre situation particulière où $a \ll R$. Commentons par mentionner l'égalité

$$\frac{1}{(\sqrt{s})^3} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du \, u^2 \exp(-su^2) \quad \text{où } s > 0$$

Grâce à cette formule on peut exprimer la force \mathbf{F}_{12} sous la forme

$$\mathbf{F}_{12} = -\mu_0 I_1 I_2 F(a/R) \mathbf{e}_3$$

où

$$\begin{aligned} F(a/R) &= \frac{1}{2} \frac{a}{R} \int_0^{2\pi} d\alpha \cos \alpha \\ &\times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du \, u^2 \exp\left(-2(1 - \cos \alpha) + (a/R)^2 u^2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} du \, u^2 \exp\left(-(a/R)^2 u^2\right) \\ &\times \int_0^{2\pi} d\alpha \cos \alpha \exp\left(-2(1 - \cos \alpha)u^2\right) \end{aligned}$$

L'intégrale est une fonction paire entière de la variable u . Elle se comporte comme $O(u^2)$ lorsque $u \rightarrow 0$ et pour $u \rightarrow \infty$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\alpha \cos \alpha \exp\left(-2(1 - \cos \alpha)u^2\right) &\approx \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \exp\left(-\alpha^2 u^2\right) \\ &= \frac{1}{|u|} \int_{-\pi|u|}^{+\pi|u|} dv \exp\left(-v^2\right) \approx \frac{1}{|u|} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \exp\left(-v^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{|u|} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} F(a/R) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} du \, u^2 \exp\left(-(a/R)^2 u^2\right) \frac{\sqrt{\pi}}{|u|} \\ &= \frac{a}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} du \, |u| \exp\left(-(a/R)^2 u^2\right) = \frac{R}{a} \end{aligned}$$

Finalement

$$\mathbf{F}_{12} \approx -\mu_0 I_1 I_2 \frac{R}{a} \mathbf{e}_3$$

Exercice 3.16.★

On considère une couronne sphérique de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur $R_2 > R_1$, formée d'un matériau de perméabilité magnétique μ . Cette couronne sphérique est placée dans le vide et mise en présence d'un champ d'induction uniforme et constant $\check{\mathbf{B}}_0$. Montrer que le champ d'induction à l'intérieur de la couronne sphérique est uniforme de valeur

$$\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \left[1 - \frac{1 - \gamma^3}{\alpha - \gamma^3} \right] \check{\mathbf{B}}_0 \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{R_1}{R_2} < 1 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{(\mu + 2\mu_0)(2\mu + \mu_0)}{2(\mu - \mu_0)^2}$$

Solution :

On adopte la même démarche qu'à la sous-section 3.4.6. On commence par déterminer le potentiel magnétique. On adopte les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) centrée au centre de la couronne sphérique. Vu le comportement asymptotique du champ magnétique, le potentiel magnétique dans la région $r \geq R_2$ est nécessairement de la forme

$$\check{\Phi}(r, \theta, \phi) = -\frac{\check{B}_0}{\mu_0} r P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

Dans la région $R_1 \leq r \leq R_2$ ce potentiel magnétique présente "a priori" la forme générale

$$\check{\Phi}(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a'_n r^n + \frac{b'_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

Enfin dans la région $r \leq R_1$, où il ne peut pas présenter de singularité il est "a priori" nécessairement de la forme

$$\check{\Phi}(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a''_n r^n P_n(\cos \theta)$$

La continuité des composantes du champ magnétique tangentes aux sphères $r = R_2$ et $r = R_1$ implique la continuité du potentiel magnétique sur ces mêmes sphères. Autrement dit, respectivement

$$a'_n R_2^n + \frac{b'_n}{R_2^{n+1}} = -\frac{\check{B}_0}{\mu_0} R_2 \delta_n^1 + \frac{b_n}{R_2^{n+1}} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

et

$$a'_n R_1^n + \frac{b'_n}{R_1^{n+1}} = a''_n R_1^n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La continuité de la composante du champ d'induction orthogonale aux sphères $r = R_2$ et $r = R_1$ implique respectivement les égalités

$$-\mu \left(n a'_n R_2^{n-1} + \frac{-(n+1) b'_n}{R_2^{n+2}} \right) = \check{B}_0 \delta_n^1 - \mu_0 \frac{-(n+1) b_n}{R_2^{n+2}} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

et

$$-\mu \left(n a'_n R_1^{n-1} + \frac{-(n+1) b'_n}{R_1^{n+2}} \right) = -\mu_0 n a''_n R_1^{n-1} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Lorsque $n \neq 1$ les quatre grandeurs b_n , a'_n , b'_n et a''_n satisfont un système de quatre équations linéaires homogènes de déterminant non-nul. Par conséquent

$$b_n = 0 \quad , \quad a'_n = 0 \quad , \quad b'_n = 0 \quad \text{et} \quad a''_n = 0 \quad , \quad \forall n \neq 1.$$

Lorsque $n = 1$ à partir des conditions relatives à la sphère $r = R_1$,

$$a'_1 = \frac{\mu_0 + 2 \mu}{3 \mu} a''_1 \quad \text{et} \quad \frac{b'_1}{R_1^3} = \frac{\mu - \mu_0}{3 \mu} a''_1$$

Après remplacement dans les deux équations relatives à la sphère $r = R_2$ pour $n = 1$ on obtient les relations

$$a'_1 R_2 + \frac{b'_1}{R_2^2} = \left(\frac{\mu_0 + 2 \mu}{3 \mu} R_2 + \frac{R_1^3}{R_2^2} \frac{\mu - \mu_0}{3 \mu} \right) a''_1 = -\frac{\check{B}_0}{\mu_0} R_2 + \frac{b_1}{R_2^2}$$

et

$$-\mu \left(a'_1 + \frac{-2 b'_1}{R_2^3} \right) = -\mu \left(\frac{\mu_0 + 2 \mu}{3 \mu} - 2 \frac{R_1^3}{R_2^3} \frac{\mu - \mu_0}{3 \mu} \right) a''_1 = \check{B}_0 + 2 \mu_0 \frac{b_1}{R_2^3}$$

desquelles il découle la relation que voici

$$\left(\frac{(\mu + 2 \mu_0)(2 \mu + \mu_0)}{6 \mu \mu_0} - 2 \frac{R_1^3}{R_2^3} \frac{(\mu - \mu_0)^2}{6 \mu \mu_0} \right) a''_1 = -\frac{3 \check{B}_0}{2 \mu_0}$$

après élimination du rapport b_1/R_2^3 . Une manipulation élémentaire de ce dernier résultat conduit à l'expression suivante du coefficient a''_1

$$a''_1 = -\frac{\check{B}_0}{\mu_0} \frac{9 \mu_0 \mu}{(\mu + 2 \mu_0)(2 \mu + \mu_0) - 2 \gamma^3 (\mu - \mu_0)^2} \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{R_1}{R_2} \leq 1$$

puis au résultat annoncé dans l'énoncé de l'exercice si de plus on remarque que le champ magnétique dans la région $r \leq R_1$ est donné par l'expression

$$\check{H}(\mathbf{x}) = -a_1'' \mathbf{e}_3$$

Exercice 3.17.★

Montrer que le champ magnétique produit par un aimant cylindrique de rayon R et de longueur L dont l'aimantation est uniforme et longitudinale est fourni, en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) , par un potentiel magnétique de la forme,

$$\check{\Phi}(\rho, \phi, z) = \frac{\check{M}_0 R}{4} \sum_{n \text{ pair}=0}^{+\infty} \sum_{k=n/2}^{+\infty} \sum_{\ell \text{ impair}=1}^{+\infty} A_{n k \ell} \left(\frac{\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + L^2/4}} \right)^n \left(\frac{R}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + L^2/4}} \right)^{2k+1} \left(\frac{Lz}{z^2 + \rho^2 + L^2/4} \right)^\ell$$

où le coefficient numérique $A_{n k \ell}$ vaut

$$A_{n k \ell} = \frac{(-1)^{k-n/2}}{k+1} \frac{(2k+n+2\ell-1)!!}{(n!)^2 \ell! (2k-n)!!}, \quad k \geq n/2.$$

Etudier le comportement de ce potentiel magnétique lorsque $|z| \ll L$ et lorsque $|z| \gg L$. Même question lorsque $\rho \ll L$.

Solution :

Partant de l'expression générale (3.69) du potentiel magnétique on peut écrire

$$\check{\Phi}(\rho, \phi, z) = \sum_{p=\pm 1} \frac{p}{4\pi} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{\check{M}_0}{\sqrt{(z-pL/2)^2 + \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \alpha}}$$

Il est alors utile de transcrire l'intégrand de l'expression qui précède sous la forme intégrale que voici,

$$\frac{1}{\sqrt{(z-pL/2)^2 + \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} R} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[- \frac{(z-pL/2)^2 + \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \alpha}{R^2} u^2 \right] du$$

L'expression du potentiel magnétique prend ainsi la forme suivante

$$\check{\Phi}(\rho, \phi, z) = \sum_{p=\pm 1} \frac{p}{4\pi} \frac{\check{M}_0}{\sqrt{\pi} R} \int_0^R r dr \int_{-\infty}^{+\infty} du \times \exp \left[- \frac{(z-pL/2)^2 + \rho^2 + r^2}{R^2} u^2 \right] \int_0^{2\pi} d\alpha \exp \left[\frac{2\rho r \cos \alpha}{R^2} u^2 \right]$$

Ensuite, compte tenu de la formule que voici

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \exp \left[\frac{2 \rho r \cos \alpha}{R^2} u^2 \right] d\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{2 \rho r u^2}{R^2} \right]^n \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{(\cos \alpha)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{2 \rho r u^2}{R^2} \right]^n \begin{cases} 2\pi/(n!)^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

on peut alors écrire l'expression qui suit pour le potentiel magnétique.

$$\begin{aligned} \check{\Phi}(\rho, \phi, z) &= \sum_{p=\pm 1} \frac{p}{4\pi} \frac{\check{M}_0}{\sqrt{\pi} R} \int_0^R r dr \int_{-\infty}^{+\infty} du \\ &\times \exp \left[-\frac{(z-pL/2)^2 + \rho^2 + r^2}{R^2} u^2 \right] \sum_{n \text{ pair}=0}^{+\infty} \left[\frac{2 \rho r u^2}{R^2} \right]^n \frac{2\pi}{(n!)^2} \end{aligned}$$

Or pour les termes pour lesquels n est pair on dispose de la formule

$$\begin{aligned} \int_0^R r dr r^n \exp \left[-\frac{r^2}{R^2} u^2 \right] &= \left[-R^2 \frac{\partial}{\partial(u^2)} \right]^{n/2} \int_0^R r dr \exp \left[-\frac{r^2}{R^2} u^2 \right] \\ &= \left[-R^2 \frac{\partial}{\partial(u^2)} \right]^{n/2} \frac{R^2}{2} \frac{1 - \exp(-u^2)}{u^2} \\ &= \frac{R^{n+2}}{2} \sum_{k=n/2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n/2}}{k+1} \frac{u^{2k-n}}{(k-n/2)!} \end{aligned}$$

Par conséquent le potentiel magnétique peut être exprimé sous la forme

$$\begin{aligned} \check{\Phi}(\rho, \phi, z) &= \sum_{p=\pm 1} \frac{p}{8\pi} \frac{R \check{M}_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp \left[-\frac{(z-pL/2)^2 + \rho^2}{R^2} u^2 \right] \\ &\times \sum_{n \text{ pair}=0}^{+\infty} \frac{2\pi}{(n!)^2} \left(\frac{2\rho}{R} \right)^n \sum_{k=n/2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n/2}}{k+1} \frac{u^{2k+n}}{(k-n/2)!} \end{aligned}$$

Après quelques manipulations formelles élémentaires cette dernière expression prend la forme que voici

$$\begin{aligned} \check{\Phi}(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{4} \frac{R \check{M}_0}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \text{ pair}=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n!)^2} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \sum_{k=n/2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n/2}}{k+1} \frac{1}{(k-n/2)!} \\ &\times \sum_{p=\pm 1} p \int_{-\infty}^{+\infty} du u^{2k+n} \exp \left[-\frac{(z-pL/2)^2 + \rho^2}{R^2} u^2 \right] \end{aligned}$$

Or au sujet de la dernière intégrale qui figure en facteur dans le membre de droite de l'expression qui précède il est aisé de se livrer la constatation suivante

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=\pm 1} p \int_{-\infty}^{+\infty} du u^{2k+n} \exp \left[- \frac{(z - p L/2)^2 + \rho^2}{R^2} u^2 \right] \\
= & \int_{-\infty}^{+\infty} du u^{2k+n} \exp \left[- \frac{z^2 + \rho^2 + L^2/4}{R^2} u^2 \right] \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{p=\pm 1} \frac{p}{\ell!} \left(\frac{p L z}{R^2} u^2 \right)^\ell \\
= & \sum_{\ell \text{ impair}=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \left(\frac{L z}{R^2} \right)^\ell \int_{-\infty}^{+\infty} du u^{2k+2\ell+n} \exp \left[- \frac{z^2 + \rho^2 + L^2/4}{R^2} u^2 \right] \\
= & \sum_{\ell \text{ impair}=1}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \left(\frac{L z}{R^2} \right)^\ell \left(\frac{R}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + L^2/4}} \right)^{2k+2\ell+n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} dv (v^2)^{k+\ell+n/2} \exp(-v^2) \\
= & \sum_{\ell \text{ impair}=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\ell!} \frac{(2k+2\ell+n-1)!!}{2^{k+\ell+n/2}} \left(\frac{L z}{R^2} \right)^\ell \left(\frac{R}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + L^2/4}} \right)^{2k+2\ell+n+1}
\end{aligned}$$

car en effet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv (v^2)^{k+\ell+n/2} \exp(-v^2) = \sqrt{\pi} \frac{(2k+2\ell+n-1)!!}{2^{k+\ell+n/2}}$$

On parvient finalement à l'expression que voici pour le potentiel magnétique associé à l'aimant

$$\begin{aligned}
\check{\Phi}(\rho, \phi, z) &= \frac{1}{4} \frac{R \check{M}_0}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \text{ pair}=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n!)^2} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \sum_{k=n/2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n/2}}{k+1} \frac{1}{(k-n/2)!} \\
&\times \sum_{\ell \text{ impair}=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\ell!} \frac{(2k+2\ell+n-1)!!}{2^{k+\ell+n/2}} \left(\frac{L z}{R^2} \right)^\ell \left(\frac{R}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + L^2/4}} \right)^{2k+2\ell+n+1} \\
= & \frac{R \check{M}_0}{4} \sum_{n \text{ pair}=0}^{+\infty} \sum_{k=n/2}^{+\infty} \sum_{\ell \text{ impair}=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n/2}}{k+1} \frac{(2k+2\ell+n-1)!!}{(2\ell)!! (n!)^2 (2k-n)!!} \\
&\times \left(\frac{\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + L^2/4}} \right)^n \left(\frac{L z}{z^2 + \rho^2 + L^2/4} \right)^\ell \left(\frac{R}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + L^2/4}} \right)^{2k+1}
\end{aligned}$$

Exercice 3.18.★

Dans le champ d'un dipôle magnétique ponctuel permanent et fixe de magnitude \check{m} , évolue une particule de masse m portant une charge électrique Q .

1. Ecrire les équations différentielles qui régissent le mouvement de la particule relativement à un système de coordonnées sphériques dont l'origine coïncide avec la position du dipôle magnétique.
2. Montrer que la composante du moment cinétique de la particule par rapport à la position du dipôle et dans la direction du dipôle est une constante du mouvement.

3. Discuter la forme de la trajectoire lorsque la particule se meut initialement dans le plan perpendiculaire au moment magnétique et passant par l'origine. (Plan équatorial.)

Solution :

Des expressions (3.37) et (3.27) et de la loi de force (3.25) on déduit l'expression qui suit de la force de Laplace subie par la charge électrique ponctuelle en mouvement

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= Q \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \wedge \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{rot} \left(\frac{\check{\mathbf{m}} \wedge \mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|^3} \right) \right] \\ &= \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \wedge \left[\frac{3(\check{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x}(t)) \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t)^2 \check{\mathbf{m}}}{\|\mathbf{x}(t)\|^5} \right] \end{aligned}$$

Il s'ensuit par conséquent l'équation du mouvement que voici

$$m \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x}(t)\|^5} \left[3(\check{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x}(t)) \left(\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \wedge \mathbf{x}(t) \right) - \mathbf{x}(t)^2 \left(\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \wedge \check{\mathbf{m}} \right) \right]$$

Il convient alors de transcrire cette dernière équation du mouvement en termes de coordonnées sphériques. Les symboles $\mathbf{e}_r(r, \theta, \phi)$, $\mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi)$ et $\mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi)$ désignent les vecteurs de la base orthonormée attachée au point de coordonnées (r, θ, ϕ) . (Voir (C.37) dans l'annexe C.3). Il est alors aisé d'établir les expressions que voici pour les dérivées partielles de ces derniers vecteurs de la base.

$$\begin{aligned} \partial_r \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) &= \mathbf{0} \quad , \quad \partial_\theta \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) = \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) \\ \partial_\phi \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) &= \sin \theta \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi) \\ \partial_r \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) &= \mathbf{0} \quad , \quad \partial_\theta \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) = -\mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) \\ \partial_\phi \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) &= \cos \theta \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi) \\ \partial_r \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi) &= \mathbf{0} \quad , \quad \partial_\theta \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi) = \mathbf{0} \\ \partial_\phi \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi) &= -\sin \theta \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) - \cos \theta \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) \end{aligned}$$

Si l'on décompose le vecteur $\mathbf{x}(t)$ qui détermine la position de la charge électrique à l'instant t selon les vecteurs de base attachés à cette position alors

$$\mathbf{x}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(r(t), \theta(t), \phi(t))$$

et par conséquent

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \dot{r} \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) + r \sin \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi)$$

Par suite, pour l'accélération

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} &= \ddot{r} \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) + \dot{r} \left(\dot{\theta} \partial_\theta \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) + \dot{\phi} \partial_\phi \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) \right) \\
&+ \left(\ddot{\theta} r + \dot{\theta} \dot{r} \right) \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) + r \dot{\theta} \left(\dot{\theta} \partial_\theta \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) + \dot{\phi} \partial_\phi \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) \right) \\
&+ \left(\ddot{\phi} r \sin \theta + \dot{\phi} \dot{r} \sin \theta + \dot{\phi} r \dot{\theta} \cos \theta \right) \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi) + \dot{\phi}^2 r \sin \theta \partial_\phi \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi)
\end{aligned}$$

et après groupement des termes

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} &= \left(\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - r \dot{\theta}^2 \right) \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) \\
&+ \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{\theta} \dot{r} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) \\
&+ \left(r \ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \right) \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi)
\end{aligned}$$

Pour en venir à l'équation du mouvement, commençons par constater que

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \wedge \mathbf{x}(t) = r^2 \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) - r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi)$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \wedge \mathbf{e}_3 &= r (\sin \theta)^2 \dot{\phi} \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) + r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi} \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) \\
&- \left(\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \right) \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi)
\end{aligned}$$

On vérifie alors aisément que l'équation vectorielle du mouvement se traduit par les trois équations scalaires qui suivent.

$$\begin{aligned}
m \left(\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - r \dot{\theta}^2 \right) &= \frac{\mu_0 Q \check{m}}{4 \pi} \frac{-\sin \theta^2}{r^2} \dot{\phi} \\
m \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{\theta} \dot{r} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) &= \frac{\mu_0 Q \check{m}}{4 \pi} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \dot{\phi} \\
m \left(r \ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\phi} \right) &= \frac{\mu_0 Q \check{m}}{4 \pi} \frac{\dot{r} \sin \theta - 2 \dot{\theta} r \cos \theta}{r^3}
\end{aligned}$$

Venons-en maintenant à l'étude du mouvement de la charge électrique dans le plan Ox^1x^2 . Dans ce cas $\theta(t) \equiv \pi/2$. On constate aisément que cette condition est effectivement en accord avec les équations du mouvement. La deuxième des équations qui précèdent est trivialement satisfaite. Quant aux deux autres équations elles se réduisent aux deux suivantes.

$$\begin{aligned}
m \left(\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 \right) &= -\alpha \frac{\dot{\phi}}{r^2} \\
m \left(r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi} \right) &= \alpha \frac{\dot{r}}{r^3} \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{\mu_0 Q \check{m}}{4 \pi}
\end{aligned}$$

Une première conséquence de ces équations est la suivante : la somme de la première équation multipliée par \dot{r} et de la seconde équation multipliée par $r\dot{\phi}$ permet de trouver une intégrale première de ce système d'équations. En effet

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{r} \left[m (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) + \alpha \frac{\dot{\phi}}{r^2} \right] + r \dot{\phi} \left[m (r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi}) - \alpha \frac{\dot{r}}{r^3} \right] \\
&= m \left[\dot{r} \ddot{r} + 2 r \dot{r} \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\phi} \ddot{\phi} \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2)}{2}
\end{aligned}$$

et par conséquent la grandeur

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = \frac{2 E_{\text{cin}}}{m} \equiv v_0^2$$

est une constante du mouvement. En outre, il résulte de la première des équations évoquées précédemment que

$$0 = r \left[m (r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi}) - \alpha \frac{\dot{r}}{r^3} \right] = \frac{d}{dt} \left[m r^2 \dot{\phi} + \alpha \frac{1}{r} \right]$$

On constate ainsi que l'expression

$$m r^2 \dot{\phi} + \alpha \frac{1}{r} = \alpha \frac{1}{r_0} \quad \text{où } r_0 \text{ est une constante}$$

est également une constante du mouvement. Nous sommes alors en mesure de dégager la relation

$$\dot{\phi} = \frac{\alpha}{m r^2} \frac{r - r_0}{r r_0}$$

Finalement, après insertion de ce dernier résultat dans l'expression de la première des constantes du mouvement obtenues ci-dessus, on parvient à l'équation différentielle du premier ordre par rapport au temps que voici

$$\dot{r}^2 + \left(\frac{\alpha}{m r_0} \right)^2 \left(\frac{r - r_0}{r^2} \right)^2 = v_0^2$$

Pour alléger l'écriture dans la suite des développements il convient de substituer à la variable r la variable

$$u = \frac{r}{r_0}$$

Dans ces conditions, moyennant quelques manipulations formelles élémentaires on parvient à l'équation différentielle que voici

$$\dot{u}^2 = \left(\frac{v_0}{r_0} \right)^2 \frac{(u^2 - \beta (u - 1)) (u^2 + \beta (u - 1))}{u^4} \quad \text{où } \beta = \frac{\alpha}{m r_0^2 v_0}$$

Deux situations sont à considérer.

Premièrement lorsque $0 \leq \beta \leq 4$.

Dans ce cas l'énergie cinétique est bornée inférieurement ; plus précisément $v_0 \geq \alpha/4(m r_0^2)$. Dans cette première situation

$$u^2 - \beta (u - 1) \geq 0 \quad , \quad \forall u$$

et

$$u^2 + \beta (u - 1) \geq 0$$

si et seulement si :

$$u \leq \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2} \leq 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2} \leq u$$

On constate ainsi que

$$\dot{u} = 0 \quad \text{si} \quad u = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2}$$

Dans le premier cas il faut que $r_0 < 0$ pour que r soit positif. Dans ce cas le mouvement suit une trajectoire de diffusion de infini vers l'infini.

Dans le second cas il faut que $r_0 > 0$ et mouvement suit également une trajectoire de diffusion de infini vers l'infini.

Deuxièmement lorsque $4 \leq \beta$.

Dans ce cas l'énergie cinétique est bornée supérieurement ; plus précisément $v_0 \leq \alpha/4(m r_0^2)$. Dans cette deuxième situation

$$(u^2 - \beta (u - 1)) (u^2 + \beta (u - 1)) \geq 0$$

si et seulement si :

$$\begin{aligned} & 1) \quad u \leq \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2} < 0 \\ & \text{ou} \\ & 2) \quad 0 \leq \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2} \leq u \leq \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\beta}}{2} \leq 2 \\ & \text{ou} \\ & 3) \quad 2 \leq \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\beta}}{2} \leq u \end{aligned}$$

On peut alors constater que

$$\dot{u} = 0 \quad \text{si} \quad u = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\beta}}{2} \quad \text{ou si} \quad u = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\beta}}{2}$$

Dans le cas 1) il faut que $r_0 < 0$ pour que r soit positif. Le mouvement suit alors une trajectoire de diffusion de infini vers l'infini.

Dans le cas 2) il faut que $r_0 > 0$. Le mouvement suit une trajectoire orbitale donc une trajectoire pour laquelle à chaque instant

$$0 \leq (-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta})/2 \leq u(t) \leq (\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\beta})/2$$

Dans le cas 3) il faut que $r_0 > 0$. Le mouvement suit alors une trajectoire de diffusion de infini vers l'infini.

Exercice 3.19★

Un dipôle magnétique permanent $\check{\mathbf{m}}$ (petit aimant) est placé au voisinage de la surface plane d'un milieu semi-infini (fer doux par exemple) de perméabilité magnétique μ . Déterminer la force et le moment des forces exercés sur le dipôle par l'aimantation que ce dipôle a induite dans le milieu semi-infini. Le dipôle est situé par la distance que le sépare de la surface du milieu magnétique et par l'angle que fait l'axe du dipôle avec la perpendiculaire à la surface du milieu.

Solution :

Le plan de séparation des deux milieux magnétiques est le plan Ox^1x^2 . Le dipôle magnétique $\check{\mathbf{m}}$ occupe la position caractérisée par le vecteur $\mathbf{x}_0 = a \mathbf{e}_3$, $a > 0$. La région $x^3 > 0$ correspond au vide de perméabilité magnétique μ_0 . En un point \mathbf{x} situé dans le vide le champ d'induction se compose du champ $\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ dû au dipôle $\check{\mathbf{m}}$ situé en $a \mathbf{e}_3$ auquel vient s'ajouter le champ $\check{\mathbf{B}}'(\mathbf{x})$ que produirait dans le vide un dipôle magnétique fictif $\check{\mathbf{m}}'$ situé en $-a \mathbf{e}_3$. Dans le milieu magnétique (milieu $x^3 < 0$), de perméabilité magnétique μ le champ d'induction $\check{\mathbf{B}}''(\mathbf{x})$ est le champ que produirait un dipôle magnétique fictif $\check{\mathbf{m}}''$ situé en $a \mathbf{e}_3$. Les dipôles $\check{\mathbf{m}}'$ et $\check{\mathbf{m}}''$ sont à déterminer à partir des conditions de continuité de la composante orthogonale du champ d'induction et de la composante tangentielle du champ magnétique à la surface de séparation des deux milieux. Ces champs d'induction sont fournis par les expressions que voici

$$\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\check{\mathbf{m}} \cdot (\mathbf{x} - a \mathbf{e}_3))(\mathbf{x} - a \mathbf{e}_3) - (\mathbf{x} - a \mathbf{e}_3)^2 \check{\mathbf{m}}}{\|\mathbf{x} - a \mathbf{e}_3\|^5}$$

$$\check{\mathbf{B}}'(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\check{\mathbf{m}}' \cdot (\mathbf{x} + a \mathbf{e}_3))(\mathbf{x} + a \mathbf{e}_3) - (\mathbf{x} + a \mathbf{e}_3)^2 \check{\mathbf{m}}'}{\|\mathbf{x} + a \mathbf{e}_3\|^5}$$

$$\check{\mathbf{B}}''(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{3(\check{\mathbf{m}}'' \cdot (\mathbf{x} - a \mathbf{e}_3))(\mathbf{x} - a \mathbf{e}_3) - (\mathbf{x} - a \mathbf{e}_3)^2 \check{\mathbf{m}}''}{\|\mathbf{x} - a \mathbf{e}_3\|^5}$$

Décomposons les moments magnétiques $\check{\mathbf{m}}$, $\check{\mathbf{m}}'$ et $\check{\mathbf{m}}''$ en composantes parallèles et orthogonales au plan $x^3 = 0$

$$\check{\mathbf{m}} = \check{\mathbf{m}}_{\parallel} + \check{\mathbf{m}}_{\perp} \quad , \quad \check{\mathbf{m}}' = \check{\mathbf{m}}'_{\parallel} + \check{\mathbf{m}}'_{\perp} \quad \text{et} \quad \check{\mathbf{m}}'' = \check{\mathbf{m}}''_{\parallel} + \check{\mathbf{m}}''_{\perp}$$

Exprimons maintenant les composantes tangentielles des champs magnétiques et les composantes orthogonales des champs d'induction sur la surface $x^3 = 0$. Dans ce but introduisons le vecteur suivant pour décrire les points de la surface de séparation des deux milieux.

$$\mathbf{y} = y^1 \mathbf{e}_1 + y^2 \mathbf{e}_2$$

Les composantes du champ magnétique et du champ d'induction, sur la surface du milieu magnétique, associées aux dipôles magnétiques $\check{\mathbf{m}}$, $\check{\mathbf{m}}'$ et $\check{\mathbf{m}}''$, respectivement parallèles et orthogonales à la surface du milieu magnétique s'écrivent,

$$\check{\mathbf{H}}_{\parallel}(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{3 (\check{\mathbf{m}}_{\parallel} \cdot \mathbf{y} - a \check{\mathbf{m}}_{\perp} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{y} - (y^2 + a^2) \check{\mathbf{m}}_{\parallel}}{(\sqrt{y^2 + a^2})^5}$$

$$\check{\mathbf{B}}_{\perp}(\mathbf{y}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3 (\check{\mathbf{m}}_{\parallel} \cdot \mathbf{y} - a \check{\mathbf{m}}_{\perp} \cdot \mathbf{e}_3)(-a \mathbf{e}_3) - (y^2 + a^2) \check{\mathbf{m}}_{\perp}}{(\sqrt{y^2 + a^2})^5}$$

$$\check{\mathbf{H}}'_{\parallel}(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{3 (\check{\mathbf{m}}'_{\parallel} \cdot \mathbf{y} + a \check{\mathbf{m}}'_{\perp} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{y} - (y^2 + a^2) \check{\mathbf{m}}'_{\parallel}}{(\sqrt{y^2 + a^2})^5}$$

$$\check{\mathbf{B}}'_{\perp}(\mathbf{y}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3 (\check{\mathbf{m}}'_{\parallel} \cdot \mathbf{y} + a \check{\mathbf{m}}'_{\perp} \cdot \mathbf{e}_3)(a \mathbf{e}_3) - (y^2 + a^2) \check{\mathbf{m}}'_{\perp}}{(\sqrt{y^2 + a^2})^5}$$

$$\check{\mathbf{H}}''_{\parallel}(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{3 (\check{\mathbf{m}}''_{\parallel} \cdot \mathbf{y} - a \check{\mathbf{m}}''_{\perp} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{y} - (y^2 + a^2) \check{\mathbf{m}}''_{\parallel}}{(\sqrt{y^2 + a^2})^5}$$

$$\check{\mathbf{B}}''_{\perp}(\mathbf{y}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{3 (\check{\mathbf{m}}''_{\parallel} \cdot \mathbf{y} - a \check{\mathbf{m}}''_{\perp} \cdot \mathbf{e}_3)(-a \mathbf{e}_3) - (y^2 + a^2) \check{\mathbf{m}}''_{\perp}}{(\sqrt{y^2 + a^2})^5}$$

La continuité de la composante du champ magnétique tangente à la surface de séparation est assurée si et seulement si

$$\check{\mathbf{m}}_{\parallel} + \check{\mathbf{m}}'_{\parallel} = \check{\mathbf{m}}''_{\parallel} \quad \text{et} \quad \check{\mathbf{m}}_{\perp} - \check{\mathbf{m}}'_{\perp} = \check{\mathbf{m}}''_{\perp}$$

Quant à la condition de continuité de la composante du champ d'induction orthogonale à cette surface elle est satisfaite si et seulement si

$$\mu_0 (\check{\mathbf{m}}_{\parallel} - \check{\mathbf{m}}'_{\parallel}) = \mu \check{\mathbf{m}}''_{\parallel} \quad \text{et} \quad \mu_0 (\check{\mathbf{m}}_{\perp} + \check{\mathbf{m}}'_{\perp}) = \mu \check{\mathbf{m}}''_{\perp}$$

De ces dernières égalités on déduit aisément les expressions suivantes

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{m}}'_{\parallel} &= \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 + \mu} \check{\mathbf{m}}_{\parallel} \quad \text{et} \quad \check{\mathbf{m}}''_{\parallel} = \frac{2 \mu_0}{\mu_0 + \mu} \check{\mathbf{m}}_{\parallel} \\ \check{\mathbf{m}}'_{\perp} &= -\frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 + \mu} \check{\mathbf{m}}_{\perp} \quad \text{et} \quad \check{\mathbf{m}}''_{\perp} = \frac{2 \mu_0}{\mu_0 + \mu} \check{\mathbf{m}}_{\perp} \end{aligned}$$

Pour déterminer la force subie par le porteur du dipôle magnétique $\check{\mathbf{m}}$ il convient de déterminer d'abord l'énergie de liaison du système. Puisque

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{B}}'(a \mathbf{e}_3) &= \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{1}{8 a^3} [3 (\mathbf{e}_3 \cdot \check{\mathbf{m}}') \mathbf{e}_3 - \check{\mathbf{m}}'] \\ &= \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{1}{8 a^3} [2 \check{\mathbf{m}}'_{\perp} - \check{\mathbf{m}}'_{\parallel}] \\ &= \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 + \mu} \frac{1}{8 a^3} [-2 \check{\mathbf{m}}_{\perp} - \check{\mathbf{m}}_{\parallel}] \end{aligned}$$

l'expression de cette énergie s'écrit

$$E = -\check{\mathbf{m}} \cdot \check{\mathbf{B}}'(a \mathbf{e}_3) = \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 + \mu} \frac{1}{8 a^3} [2 \check{\mathbf{m}}_{\perp}^2 + \check{\mathbf{m}}_{\parallel}^2]$$

Par conséquent, en vertu de la formule (3.39), nous pouvons en conclure que

$$\mathbf{F}_{\perp} = \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{3}{8 a^4} \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 + \mu} [2 \check{\mathbf{m}}_{\perp}^2 + \check{\mathbf{m}}_{\parallel}^2] \mathbf{e}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{\parallel} = \mathbf{0}$$

Exercice 3.20

Un champ magnétique statique est produit par une aimantation permanente $\check{\mathbf{M}}(\mathbf{x})$, la densité de courant électrique étant identiquement nulle. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \cdot \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) = 0$$

Solution :

Dans cette situation le champ magnétique peut être exprimé sous la forme d'un gradient du potentiel magnétique $\check{\Phi}(\mathbf{x})$ et par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \cdot \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) &= - \int_{\mathbb{R}^3} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} \check{\Phi}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\mathit{div}(\check{\Phi}(\mathbf{x}) \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x})) - \check{\Phi}(\mathbf{x}) \mathit{div} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \right) dV(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

compte tenu du théorème de la divergence (2.57) et compte tenu de l'équation (3.17). En effet le produit $\check{\Phi}(\mathbf{x}) \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ décroît comme $O(\|\mathbf{x}\|^{-3})$ lorsque $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$.

Chapitre 4

Solutions des exercices du chapitre 4

Exercice 4.1★

Une boule de rayon R (centrée à l'origine) est formée d'un matériau conducteur de résistivité ρ . Cette boule est soumise à l'instant $t = 0$ à l'influence d'un champ électrique "extérieur", indépendant du temps, $\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ de la forme

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{x}) = E_0 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2}{R^2} \mathbf{e}_3$$

Sachant qu'initialement cette boule conductrice est neutre, déterminer le champ électrique $\mathbf{E}_{\text{équi}}(\mathbf{x})$ qui va s'établir lorsque l'équilibre sera atteint. Déterminer les lignes de courant qui correspondent à cet état d'équilibre.

Indication : Traiter le problème en coordonnées sphériques. Utiliser les résultats présentés dans l'annexe C.3. S'inspirer des développements présentés à la sous-section 2.5.6.

Solution :

Puisqu'en coordonnées sphériques,

$$\mathbf{E}_0(r, \theta, \phi) = E_0 \frac{r^2 (\sin \theta)^2}{R^2} (\cos \theta \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) - \sin \theta \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi))$$

il suit de la formule (C.40) que le rotationnel de ce champ électrique est non-nul. En coordonnées sphériques il s'écrit

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}_0(r, \theta, \phi) = -2 \frac{E_0 r \sin \theta}{R^2} \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi)$$

Pour répondre à la question posée il faut commencer par déterminer le potentiel $\Phi(\mathbf{x})$ qui figure dans l'expression (4.8). Ce potentiel satisfait aux conditions (4.9) et (4.10). Comme il ne peut pas présenter de singularité à l'intérieur de la boule conductrice il possède la forme générale

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

et il suit des formules (C.38) que les composantes correspondantes du champ électrique ont pour expressions générales

$$\begin{aligned} E_r(r, \theta, \phi) &= -\frac{\partial \Phi(r, \theta, \phi)}{\partial r} = -\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell a_{\ell} r^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta) \\ E_{\theta}(r, \theta, \phi) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} r^{\ell-1} \sin \theta \frac{dP_{\ell}(\cos \theta)}{d \cos \theta} \\ E_{\phi}(r, \theta, \phi) &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, la condition (4.10), implique l'égalité

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r(R, \theta, \phi) \cdot \mathbf{E}_0(R, \theta, \phi) &= E_0 (\sin \theta)^2 \cos \theta = \mathbf{e}_r(R, \theta, \phi) \cdot \mathbf{grad} \Phi(R, \theta, \phi) \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell a_{\ell} R^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta) \end{aligned}$$

puisque présentement $\mathbf{n}(R, \theta, \phi) = \mathbf{e}_r(R, \theta, \phi)$. L'identification des termes qui figurent dans le deuxième membre et dans le quatrième membre de la suite d'égalités qui précède conduit aux résultats suivants

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{2 E_0}{5} \quad , \quad a_3 = -\frac{2 E_0}{15 R^2} \quad \text{et} \quad a_0 \quad \text{arbitraire} \\ \text{autrement} \quad a_{\ell} = 0 \quad , \quad \forall \ell \neq 0, 1 \text{ ou } 3 \end{aligned}$$

car, à l'aide des expressions (D.16), il est aisé de vérifier que

$$(\sin \theta)^2 \cos \theta = \frac{2}{5} (P_1(\cos \theta) - P_3(\cos \theta))$$

Finalement, après réduction des expressions

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{équ}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}) \\ &= \frac{2 E_0}{5 R^2} \left[(r^2 - R^2) \cos \theta \mathbf{e}_r(R, \theta, \phi) - (2 r^2 - R^2) \sin \theta \mathbf{e}_{\theta}(R, \theta, \phi) \right] \end{aligned}$$

A l'extérieur de la boule le potentiel satisfait aux conditions (4.11) et (4.12) et il est continu à la surface de cette dernière. La forme la plus générale du potentiel qui satisfait à ces conditions est la suivante

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell} r^{-\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta)$$

et la condition de continuité du potentiel à la surface de la boule implique les relations

$$\frac{b_0}{R} = a_0 \quad , \quad \frac{b_1}{R^2} = a_1 R = \frac{2 E_0 R}{5} \quad \text{et} \quad \frac{b_3}{R^4} = a_3 R^3 = -\frac{2 E_0 R}{15}$$

autrement $b_\ell = 0 \quad , \quad \forall \ell \neq 0, 1 \text{ ou } 3$

Donc le potentiel à l'extérieur de la boule s'écrit

$$\Phi(r, \theta, \phi) = a_0 \frac{R}{r} P_0(\cos \theta) + \frac{2 E_0 R}{5} \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_1(\cos \theta) - \frac{2 E_0 R}{15} \left(\frac{R}{r}\right)^4 P_3(\cos \theta)$$

Pour déterminer la valeur de la constante a_0 appliquons la loi de Gauss à la surface extérieure de la boule conductrice. Il vient

$$\begin{aligned} \int_{r=R} \mathbf{E}_{\text{éq}}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \int_{r=R} \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \int_{r=R} \mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{a_0}{R} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

En effet la contribution du champ $\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ à l'intégrale de surface est nulle de même que la contribution du champ électrique associé aux deux derniers termes (dipolaire et octupolaire) du potentiel extérieur. Reste pour seule contribution celle du premier terme en r^{-1} . Comme la charge totale de la boule est nulle la constante a_0 prend la valeur $a_0 = 0$.

Pour l'étude du champ électrique interne de la boule conductrice il est alors judicieux de revenir aux coordonnées cartésiennes. A l'aide des relations (C.34) et de l'expression précédemment obtenue pour ce champ électrique interne il est aisé de constater qu'à l'équilibre,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{éq}}(\mathbf{x}) &= \frac{E_0}{5 R^2} \left[(3 r^2 - 2 R^2 - r^2 \cos(2\theta)) \mathbf{e}_3 \right. \\ &\quad \left. - r^2 \sin(2\theta) (\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2) \right] \\ &= \frac{2E_0}{5 R^2} \left[\left(2 (x^2 + y^2) + z^2 - R^2 \right) \mathbf{e}_3 - x z \mathbf{e}_1 - y z \mathbf{e}_2 \right] \end{aligned}$$

puisque

$$\cos(2\theta) = \frac{z^2 - x^2 - y^2}{r^2} \quad , \quad \sin(2\theta) = \frac{2z \sqrt{x^2 + y^2}}{r^2} \quad \text{et} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Le champ électrique présente une symétrie cylindrique et la composante selon le vecteur de base $\mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi)$ est nulle. Il suffit donc d'étudier ce champ et les lignes de courant qui en résultent dans le plan $y = 0$. Les lignes de courant sont alors fournies par les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dx} = \frac{E_{\text{éq}}^3(\mathbf{x})}{E_{\text{éq}}^1(\mathbf{x})} = \frac{R^2 - 2x^2 - z^2}{xz}$$

Or cette équation peut aussi s'écrire

$$\frac{d(x^2 z^2)}{dx} = 2x (R^2 - x^2)$$

Il est alors aisé de constater que la solution générale de cette équation différentielle s'écrit

$$z(x) = \pm \frac{\sqrt{R^2 x^2 - x^4 - A}}{x} \quad \text{où } 0 \leq |x| \leq R$$

Le symbole A désigne une constante d'intégration. Pour interpréter les lignes de courant il convient d'écrire cette dernière constante sous la forme

$$A = \alpha (1 - \alpha) R^4 \quad \text{où } 0 \leq \alpha \leq 1$$

Ainsi,

$$z(x) = \pm \frac{\sqrt{(x^2 - \alpha R^2) ((1 - \alpha) R^2 - x^2)}}{x}$$

où $\alpha R^2 \leq x^2 \leq (1 - \alpha) R^2$ et $0 \leq \alpha \leq 1/2$

Grâce à cette dernière expression il est finalement aisé d'esquisser la forme des lignes de courant. A chaque valeur du paramètre α comprise entre 0 et 1/2 correspond une ligne de courant. Il est immédiatement visible que ces lignes de courant sont des arcs du cercle de rayon R centré à l'origine lorsque $\alpha = 0$. A l'autre extrême, lorsque $\alpha = 1/2$, les lignes de courant correspondantes se réduisent aux deux points de coordonnées $(x = \pm R/\sqrt{2}, z = 0)$ dans le plan Oxz . On notera l'existence d'une ligne de courant limite formée du diamètre $x = y = 0, -R \leq z \leq +R$ pour laquelle la densité de courant est nulle. Autrement, les lignes de courant forment une famille de courbes fermées concentriques entourant les points $(x = \pm R/\sqrt{2}, z = 0)$ précédemment évoqués. Une étude plus complète des lignes de courant est très aisée et laissée aux soins du lecteur.

Exercice 4.2

On considère une boule conductrice de rayon R , de conductivité σ et de constante diélectrique ε . Cette boule est située dans le vide. A l'instant $t = 0$ elle est mise en présence d'un champ électrique uniforme \mathbf{E}_0 . Déterminer l'évolution du système et l'état d'équilibre auquel il parvient sachant que la charge électrique totale Q de cette boule est nulle.

Indication : Voir les commentaires faits à la fin de la sous-section 2.5.6 au sujet du résultat (2.170).

Solution :

Adoptons un système de coordonnées cartésiennes attaché au centre de la boule, tel que le champ électrique uniforme s'écrive $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_3$. A l'instant $t > 0$ le champ électrique effectif à l'intérieur de la boule conductrice est de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 - \mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}, t) \quad \text{où} \quad \Phi(\mathbf{x}, t) = f(x^3, t)$$

Or initialement, en $t = 0$, la densité de charge électrique à l'intérieur du milieu conducteur est identiquement nulle. Elle est par conséquent identiquement nulle au cours du temps puisque, comme cela fut établi à la sous-section 4.2.2, l'évolution de la densité de charge électrique au sein d'un milieu conducteur est régie par la relation $q(\mathbf{x}, t) = q(\mathbf{x}, 0) \exp(-t/\tau)$. Il en résulte que

$$\text{div}(\varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) = \text{div}(\varepsilon (\mathbf{E}_0 - \mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}, t))) = -\varepsilon \frac{\partial^2 f(x^3, t)}{\partial (x^3)^2} = 0$$

Dans ces conditions le potentiel électrique est de la forme

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = f(x^3, t) = -E(t) x^3 + \Phi_0(t)$$

et par voie de conséquence la densité de courant prend la forme

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sigma (E_0 + E(t)) \mathbf{e}_3$$

Dans ces dernières expressions les symboles $E(t)$ et $\Phi_0(t)$ désignent des constantes d'intégration dépendantes du temps qui sont à déterminer. Notons $\omega(\mathbf{x}, t)$ la densité de charge électrique à la surface de la boule conductrice. La loi de conservation de la charge électrique implique que la dérivée par rapport au temps de cette densité superficielle de charge électrique est fournie par l'expression que voici à partir de la valeur limite de la densité de courant à la surface du milieu conducteur.

$$\frac{\partial \omega(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sigma (E_0 + E(t)) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_3$$

En outre, il est manifeste que le potentiel électrique, respectivement à l'intérieur et à l'extérieur à la boule, est donné par des expressions de la forme suivante où l'on a posé $r = \|\mathbf{x}\|$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \Phi_0(t) - E(t) r \cos \theta & \text{lorsque} \quad 0 \leq r \leq R \\ \Phi(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell}(t) \frac{1}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) & \text{lorsque} \quad R \leq r \end{aligned}$$

En effet la seconde de ces expressions découle du fait qu'à l'extérieur de la boule le potentiel $\Phi(\mathbf{x}, t)$ satisfait à l'équation de Poisson et tend vers 0 lorsque $\|\mathbf{x}\|$ tend vers l'infini. Ensuite la continuité du potentiel à la surface de la boule implique, $\forall t > 0$, les égalités

$$b_0(t) = \Phi_0(t) R \quad , \quad b_1(t) = -E(t) R^3 \quad \text{et} \quad b_{\ell}(t) = 0 \quad , \forall \ell > 1$$

Des expressions qui viennent d'être obtenues pour le potentiel on déduit les expressions qui suivent pour les composantes radiales du champ de déplacement électrique à l'intérieur et à l'extérieur à la boule. Elles s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} D_r^{\text{int}}(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon (E_0 + E(t)) \cos \theta && \text{lorsque } 0 \leq r \leq R \\ D_r^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon_0 \left(b_0(t) \frac{1}{R^2} + b_1(t) \frac{2}{R^3} \cos \theta \right) \\ &= \varepsilon_0 \left(\frac{\Phi_0(t)}{R} - 2 E(t) \cos \theta \right) && \text{lorsque } R \leq r \end{aligned}$$

Or selon la loi de Gauss, à la surface de la sphère on a la relation

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{x}, t) &= D_r^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t) - D_r^{\text{int}}(\mathbf{x}, t) \\ &= \varepsilon_0 \frac{\Phi_0(t)}{R} - [\varepsilon E_0 + (2 \varepsilon_0 + \varepsilon) E(t)] \cos \theta && \text{lorsque } \|\mathbf{x}\| = R \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{\partial \omega(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{1}{R} \frac{d\Phi_0(t)}{dt} - (2 \varepsilon_0 + \varepsilon) \frac{dE(t)}{dt} \cos \theta = \sigma (E_0 + E(t)) \cos \theta$$

d'où il résulte que

$$\frac{d\Phi_0(t)}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dE(t)}{dt} = -\frac{\sigma}{2 \varepsilon_0 + \varepsilon} (E_0 + E(t))$$

Ainsi, puisque initialement $E(0) = 0$, il vient

$$E(t) = E_0 \left(\exp \left(-\frac{\sigma}{2 \varepsilon_0 + \varepsilon} t \right) - 1 \right)$$

En outre, puisque la charge électrique totale du système est nulle, la condition

$$\int_{\partial B(\mathbf{0}, R)} \omega(\mathbf{x}, t) d\sigma(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{0}, R)} \varepsilon_0 \frac{\Phi_0(t)}{R} d\sigma(\mathbf{x}) = 4\pi \varepsilon_0 R \Phi_0(t) = 0$$

doit être vérifiée. Par conséquent il faut que $\Phi_0(t) = 0$. Finalement

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= -E(t) \frac{R^3}{r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} \\ \text{où } \mathbf{p}(t) &= -4\pi \varepsilon_0 R^3 E(t) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Rappelons enfin qu'à l'équilibre $\mathbf{E}(t) \rightarrow -\mathbf{E}_0$. Ce résultat livre donc l'aspect dynamique rattaché à la situation d'une boule conductrice en présence d'un champ électrique uniforme en électrostatique.

Exercice 4.3

On considère un conducteur filiforme fermé $\gamma(t)$ en forme de boucle circulaire plane rigide de rayon a et de résistance électrique R . Quelles sont les forces que

ce conducteur subit lorsqu'on le déplace dans un champ d'induction $\check{\mathbf{B}}_0$ uniforme et indépendant du temps ? Le vecteur $\mathbf{x}_0(t)$ donne la position du centre de la boucle circulaire à l'instant t et le vecteur axial $\check{\boldsymbol{\omega}}(t)$ en fournit la vitesse de rotation autour de ce centre à l'instant t . La boucle circulaire est munie d'une orientation axiale décrite par le vecteur axial $\check{\mathbf{n}}(t)$. La figure 4.1 décrit la situation envisagée.

Exprimer l'énergie par unité de temps qu'il faut fournir pour mouvoir ce conducteur. Discussion du résultat.

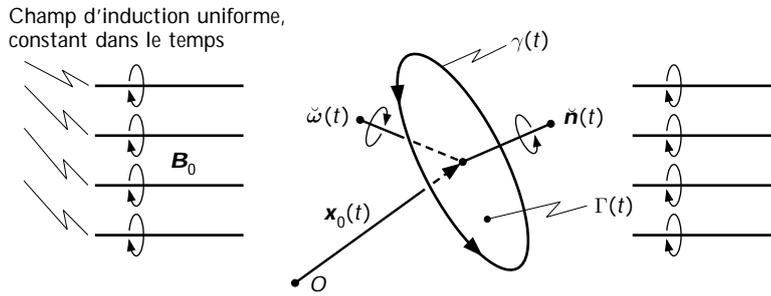


FIGURE 4.1 – Déplacement d'une boucle circulaire filiforme rigide et conductrice dans un champ d'induction uniforme et constant dans le temps. Le déplacement de la boucle est la composition d'un mouvement instantané de translation et de rotation autour d'un axe passant par le centre de cette boucle.

Indication : On négligera les effets d'auto-induction, c'est à dire le fait que le courant induit produit un champ magnétique.

Solution :

Notons $\Gamma(t)$ le disque plane dont le bord $\partial\Gamma(t)$ coïncide avec le cercle formé par la boucle conductrice. Ce disque est muni d'une orientation axiale caractérisée par un vecteur unité axial $\check{\mathbf{n}}(t)$ et le cercle $\gamma(t)$ est muni de l'orientation polaire correspondante compte tenu des conventions qui ont été adoptées dans cet ouvrage. Le flux du champ d'induction au travers de la surface $\Gamma(t)$ s'écrit

$$F(t) = \int_{\Gamma(t)} \check{\mathbf{B}}_0 \cdot d\check{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \pi a^2 \check{\mathbf{B}}_0 \cdot \check{\mathbf{n}}(t)$$

La position du cercle conducteur est donnée par la position $\mathbf{x}_0(t)$ du centre de celui-ci et par le vecteur axial $\check{\mathbf{n}}(t)$ qui en fixe l'orientation. Le mouvement est donc composé d'un mouvement de translation instantanée de vitesse $\mathbf{v}_0(t) = d\mathbf{x}_0(t)/dt$ et d'un mouvement de rotation instantanée de vitesse angulaire $\check{\boldsymbol{\omega}}(t)$ autour du centre $\mathbf{x}_0(t)$. Ainsi

$$\frac{d\check{\mathbf{n}}(t)}{dt} = \check{\boldsymbol{\omega}}(t) \wedge \check{\mathbf{n}}(t)$$

et il suit de la loi d'induction de Faraday que l'intensité $I(t)$ du courant qui parcourt la boucle est donné en fonction du mouvement par la relation

$$\frac{dF(t)}{dt} = \pi a^2 \check{\mathbf{B}}_0 \cdot \frac{d\check{\mathbf{n}}(t)}{dt} = \pi a^2 \check{\mathbf{B}}_0 \cdot (\check{\boldsymbol{\omega}}(t) \wedge \check{\mathbf{n}}(t)) = -R I(t)$$

Par ailleurs la force de Laplace totale $\mathbf{F}(t)$ subie par la boucle est nulle puisque

$$\mathbf{F}(t) = \int_{\partial\Gamma(t)} I(t) d\mathbf{x} \wedge \check{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{0} \quad \text{car} \quad \int_{\partial\Gamma} d\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Quant au moment $\mathcal{M}(t)$ des forces de Laplace par rapport au centre de la boucle, il est fourni par expression

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t) &= \int_{\partial\Gamma(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)) \wedge (I(t) d\mathbf{x} \wedge \check{\mathbf{B}}_0) \\ &= I(t) \int_{\partial\Gamma(t)} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)) \cdot \check{\mathbf{B}}_0) d\mathbf{x} = I(t) \int_{\partial\Gamma(t)} (\mathbf{x} \cdot \check{\mathbf{B}}_0) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

puisque, pour tout $\mathbf{x} \in \partial\Gamma(t)$ l'égalité $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)) \cdot d\mathbf{x} = 0$ est vérifiée. Il convient ensuite de remarquer que quel que soit le vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ on a la suite d'égalités que voici

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \int_{\partial\Gamma(t)} \check{\mathbf{B}}_0 \wedge (\mathbf{x} \wedge d\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Gamma(t)} \left(-(\check{\mathbf{B}}_0 \cdot \mathbf{x}) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) \check{\mathbf{B}}_0 \right) \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial\Gamma(t)} \left(-(\check{\mathbf{B}}_0 \cdot \mathbf{x}) \mathbf{grad} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{grad} (\check{\mathbf{B}}_0 \cdot \mathbf{x}) \right) \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial\Gamma(t)} \left(-2 (\check{\mathbf{B}}_0 \cdot \mathbf{x}) \mathbf{grad} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{grad} \left[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) (\check{\mathbf{B}}_0 \cdot \mathbf{x}) \right] \right) \cdot d\mathbf{x} \\ &= -2 \mathbf{u} \cdot \int_{\partial\Gamma(t)} (\check{\mathbf{B}}_0 \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

La dernière égalité de cette suite d'égalités découle du fait que l'intégrale du gradient d'une fonction sur un chemin fermé est nulle. Compte tenu de ce dernier résultat

$$\int_{\partial\Gamma(t)} \check{\mathbf{B}}_0 \wedge (\mathbf{x} \wedge d\mathbf{x}) = -2 \int_{\partial\Gamma(t)} (\check{\mathbf{B}}_0 \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

et par conséquent, finalement

$$\mathcal{M}(t) = -\frac{I(t)}{2} \int_{\partial\Gamma(t)} \check{\mathbf{B}}_0 \wedge (\mathbf{x} \wedge d\mathbf{x}) = \pi a^2 I(t) \check{\mathbf{n}}(t) \wedge \check{\mathbf{B}}_0$$

Déterminons maintenant la puissance qu'il faut fournir pour imposer le mouvement prescrit. Cette puissance est donnée par l'opposé de l'intégrale, étendue au contour du conducteur filiforme, du produit scalaire de la force de Laplace subie par un élément infinitésimal du conducteur par la vitesse de ce dernier élément. Formellement

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= - \int_{\partial\Gamma(t)} (I(t) d\mathbf{x} \wedge \check{\mathbf{B}}_0) \cdot (\check{\boldsymbol{\omega}}(t) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \\
&= -I(t) \int_{\partial\Gamma(t)} [\check{\mathbf{B}}_0 \wedge (\check{\boldsymbol{\omega}}(t) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))] \cdot d\mathbf{x} \\
&= -I(t) \int_{\partial\Gamma(t)} [- (\check{\mathbf{B}}_0 \cdot \check{\boldsymbol{\omega}}(t)) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + (\check{\mathbf{B}}_0 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \check{\boldsymbol{\omega}}(t)] \cdot d\mathbf{x} \\
&= -I(t) \int_{\partial\Gamma(t)} (\check{\mathbf{B}}_0 \cdot \mathbf{x}) (\check{\boldsymbol{\omega}}(t) \cdot d\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Ensuite si, dans la relation établie plus haut, on remplace le vecteur \mathbf{u} par le vecteur $\check{\boldsymbol{\omega}}(t)$, on obtient l'expression suivante pour la puissance qu'il faut fournir pour maintenir le mouvement prescrit. Plus précisément

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= -I(t) \int_{\partial\Gamma(t)} (\check{\mathbf{B}}_0 \cdot \mathbf{x}) (\check{\boldsymbol{\omega}}(t) \cdot d\mathbf{x}) = \frac{I(t) \check{\boldsymbol{\omega}}(t)}{2} \cdot \int_{\partial\Gamma(t)} (\check{\mathbf{B}}_0 \wedge (\mathbf{x} \wedge d\mathbf{x})) \\
&= I(t) \pi a^2 \check{\boldsymbol{\omega}}(t) \cdot (\check{\mathbf{B}}_0 \wedge \check{\mathbf{n}}(t)) = -I(t) \pi a^2 \check{\mathbf{B}}_0 \cdot (\check{\boldsymbol{\omega}}(t) \wedge \check{\mathbf{n}}(t))
\end{aligned}$$

Finalement, compte tenu de l'expression

$$I(t) = -\frac{\pi a^2}{R} \check{\mathbf{B}}_0 \cdot (\check{\boldsymbol{\omega}}(t) \wedge \check{\mathbf{n}}(t))$$

obtenue précédemment pour le courant $I(t)$, on aboutit à la formule

$$\frac{dE}{dt} = \frac{(\pi a^2)^2}{R} (\check{\mathbf{B}}_0 \cdot (\check{\boldsymbol{\omega}}(t) \wedge \check{\mathbf{n}}(t)))^2$$

qui est le résultat cherché.

Exercice 4.4

Il s'agit de généraliser les formules (4.41) et (4.42) à la situation dans laquelle un courant électrique règne dans une région bornée Γ de l'espace qui est occupée par un milieu magnétique de susceptibilité magnétique μ alors que l'extérieur de cette région est le vide de susceptibilité magnétique μ_0 et qu'aucun courant électrique n'y circule.

Solution :

On commence par poser

$$\check{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} dV(\mathbf{y})$$

Il est ensuite aisé de constater que

$$\mathbf{rot} \check{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \mathbf{div} \check{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}) = 0$$

En effet, vu la formule (2.72), l'expression de $\check{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x})$ peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) \wedge \mathbf{j}(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}) \\ &= \check{\mathbf{rot}}_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dV(\mathbf{y}) \right)\end{aligned}$$

Par conséquent il suit de la formule (2.61) que $\mathit{div} \check{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}) = 0$. En outre,

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}) &= \check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{rot}} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dV(\mathbf{y}) \right) \\ &= \mathbf{grad} \mathit{div} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dV(\mathbf{y}) \right) - \Delta \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dV(\mathbf{y}) \right) \\ &= \mathbf{j}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

en vertu des résultats établis sous (3.19) et suivants. Notons $\check{\mathbf{H}}(\mathbf{x})$ le champ magnétique produit par les courants localisés dans le milieu Γ . En vertu de la loi d'Ampère,

$$\check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) - \check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

et par conséquent

$$\check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = \check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}) - \mathbf{grad} \check{\Phi}(\mathbf{x})$$

où le symbole $\check{\Phi}(\mathbf{x})$ désigne un potentiel magnétique, continu dans tout l'espace, et qui reste à déterminer, par les conditions aux limites. Il suit de la condition $\mathit{div} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = 0$ que $\mathit{div} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = 0$, $\forall \mathbf{x} \notin \partial\Gamma$. Autrement dit

$$\mathit{div} \mathbf{grad} \check{\Phi}(\mathbf{x}) \equiv \Delta \check{\Phi}(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \notin \partial\Gamma$$

Soit $\mathbf{x} \in \partial\Gamma$. Notons $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ le vecteur unité, orthogonal à la surface $\partial\Gamma$ au point \mathbf{x} et orienté vers l'extérieur du domaine Γ . La composante du champ d'induction orthogonale à la surface $\partial\Gamma$ doit être continue. En d'autres termes

$$\begin{aligned}&\mu_0 \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot (\check{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{n}(\mathbf{x})) - \mathbf{grad} \check{\Phi}(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{n}(\mathbf{x}))) \\ &= \mu \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot (\check{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{n}(\mathbf{x})) - \mathbf{grad} \check{\Phi}(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{n}(\mathbf{x}))) \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Gamma\end{aligned}$$

Or le champ de vecteurs $\check{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x})$ est continu en tout point de la surface $\partial\Gamma$ et par conséquent on peut écrire

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot (\mu_0 \mathbf{grad} \check{\Phi}(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{n}(\mathbf{x})) - \mu \mathbf{grad} \check{\Phi}(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{n}(\mathbf{x}))) \\ &= (\mu_0 - \mu) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \check{\mathbf{H}}_0(\mathbf{x}) \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Gamma\end{aligned}$$

On constate qu'on est ici confronté à un problème qui est l'analogie formel du problème d'électrostatique qui consiste à déterminer le potentiel associé à une distribution superficielle de charge électrique sur la surface de séparation de deux milieux de constantes diélectriques de valeurs différentes. Dans une telle situation il existe une "fonction de Green" $G(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ où $z \in \partial\Gamma$, qui ne dépend que de la géométrie du domaine Γ et de la valeur des constantes μ et μ_0 , telle que

$$\begin{aligned}\check{\Phi}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0 - \mu}{4\pi} \int_{\partial\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathbf{n}(\mathbf{z}) \cdot \check{\mathbf{H}}_0(\mathbf{z}) d\sigma(\mathbf{z}) \\ &= \frac{\mu_0 - \mu}{4\pi} \int_{\partial\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \check{\mathbf{H}}_0(\mathbf{z}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z})\end{aligned}$$

Puisque

$$\Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0 \quad , \forall \mathbf{x} \notin \partial\Gamma$$

alors, en vertu du résultat (2.69), il existe un champ de vecteurs $\check{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ tel que

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{rot}_{\mathbf{x}} \check{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad , \forall \mathbf{x} \notin \partial\Gamma$$

qui de plus satisfait à la condition "de jauge"

$$\mathbf{div}_{\mathbf{x}} \check{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0 \quad , \forall \mathbf{x}$$

Disposant du champ de vecteurs $\check{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ on peut alors exprimer le gradient du potentiel magnétique à l'aide de la formule

$$\mathbf{grad} \check{\Phi}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 - \mu}{4\pi} \mathbf{rot} \left[\int_{\partial\Gamma} \check{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y}) \wedge (\mathbf{z} - \mathbf{y})}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^3} dV(\mathbf{y}) \right) \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}) \right]$$

Pour la commodité d'écriture introduisons la matrice 3×3 d'éléments

$$L_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Gamma} \frac{(\mathbf{e}_i \cdot \check{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{z})) (\mathbf{e}_k \wedge (\mathbf{z} - \mathbf{y})) \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z})}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|^3}$$

Ainsi, lorsque $\mathbf{x} \in \text{int}\Gamma$, le potentiel-vecteur du champ d'induction associé aux courants s'écrit

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{g_{ik}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - (\mu_0 - \mu) L_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) j^k(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y})$$

et lorsque $\mathbf{x} \in \mathbb{C}\Gamma$ il s'écrit

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{g_{ik}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - (\mu_0 - \mu) L_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) j^k(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y})$$

Finalement, partant de la formule (4.41) on parvient à l'expression suivante pour l'énergie magnétique

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \\ &= \frac{\mu}{8\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} j^i(\mathbf{x}) \left(\frac{g_{ik}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - (\mu - \mu_0) L_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) j^k(\mathbf{y}) dV(\mathbf{x}) dV(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

ou encore à l'expression symétrique,

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{\mu}{8\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \\ &\times j^i(\mathbf{x}) \left(\frac{\delta_{ik}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - (\mu - \mu_0) \frac{L_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + L_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{2} \right) j^k(\mathbf{y}) dV(\mathbf{x}) dV(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Ce résultat est une généralisation du résultat (4.42). Dans cette approche la détermination de la fonction $G(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ est un problème difficile pour la solution duquel diverses méthodes d'approximation peuvent être utilisées. Soulignons pour terminer que le problème dans lequel le domaine Γ est une boule peut être traité analytiquement en s'inspirant des méthodes de calcul présentées en électrostatique.

Exercice 4.5

On considère deux conducteurs filiformes circulaires γ_1 et γ_2 de rayons R_1 et R_2 situés dans des plans parallèles distants de a et centrés sur le même axe perpendiculaire à ces plans. La figure 4.54 décrit la situation envisagée.

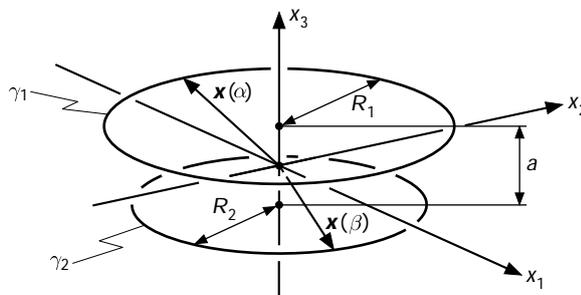


FIGURE 4.2 – Couplage inductif entre deux courants filiformes circulaires situés dans des plans parallèles et dont les centres sont situés sur une même droite orthogonale à ces plans.

Calculer de manière approchée le coefficient d'induction mutuelle L_{12} lorsque la distance $d = \sqrt{(R_1 - R_2)^2 + a^2}$ est beaucoup plus petite que le rayon moyen $R = \sqrt{R_1 R_2}$.

Indication : Le résultat auquel il faut parvenir s'écrit

$$L_{12} = \mu_0 R \left[\ln \left(\frac{8R}{d} \right) - 2 + O(d/2R) \right]$$

Solution :

Les équations paramétriques des courants filiformes γ_1 et γ_2 s'écrivent

$$\mathbf{x}(\alpha) = R_1(\cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2) + \frac{a}{2} \mathbf{e}_3$$

et

$$\mathbf{y}(\beta) = R_2(\cos \beta \mathbf{e}_1 + \sin \beta \mathbf{e}_2) - \frac{a}{2} \mathbf{e}_3$$

et donc

$$d\mathbf{x}(\alpha) = R_1(-\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2) d\alpha$$

et

$$d\mathbf{y}(\beta) = R_2(-\sin \beta \mathbf{e}_1 + \cos \beta \mathbf{e}_2) d\beta$$

Partant de l'expression particulière donnée au début de la sous-section 4.4.2 pour le coefficient d'induction mutuelle L_{12} de deux courants filiformes, il vient

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \frac{R_1 R_2 \cos(\alpha - \beta)}{\sqrt{(R_1 - R_2)^2 + a^2 + 2 R_1 R_2 (1 - \cos(\alpha - \beta))}} \\ &= \frac{\mu_0 R}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{\eta^2 + (1 - \cos \alpha)/2}} \end{aligned}$$

Dans le dernier membre de cette suite d'égalités on a posé

$$R = \sqrt{R_1 R_2} \quad , \quad d = \sqrt{(R_1 - R_2)^2 + a^2} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{d}{2R}$$

Procédons au changement de variable d'intégration de α en $u = \sin(\alpha/2)$. En terme de cette nouvelle variable d'intégration

$$L_{12} = \frac{\mu_0 R}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{\eta^2 + (1 - \cos \alpha)/2}} = \mu_0 R \int_0^1 \frac{1 - 2u^2}{\sqrt{\eta^2 + u^2}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Pour procéder à l'intégration du second membre de cette expression commençons par relever que

$$\frac{d}{du} \ln \left(\frac{u + \sqrt{\eta^2 + u^2}}{1 + \sqrt{\eta^2 + 1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + u^2}}$$

Cette remarque nous permet procéder à une intégration par partie de l'expression précédente du coefficient d'induction mutuelle L_{12} . Il vient

$$\begin{aligned}
L_{12} &= \mu_0 R \left[\ln \left(\frac{u + \sqrt{\eta^2 + u^2}}{1 + \sqrt{\eta^2 + 1}} \right) \frac{1 - 2u^2}{\sqrt{1 - u^2}} \Big|_0^1 \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 du \ln \left(\frac{u + \sqrt{\eta^2 + u^2}}{1 + \sqrt{\eta^2 + 1}} \right) \frac{d}{du} \left(\frac{1 - 2u^2}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right] \\
&= \mu_0 R \left[- \ln \left(\frac{\eta}{1 + \sqrt{\eta^2 + 1}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 du \ln \left(\frac{u + \sqrt{\eta^2 + u^2}}{1 + \sqrt{\eta^2 + 1}} \right) \frac{d}{du} \left(\frac{1 - 2u^2}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right] \\
&= \mu_0 R \left[\ln \left(\frac{2}{\eta} \right) - \int_0^1 du \ln u \frac{d}{du} \left(\frac{1 - 2u^2}{\sqrt{1 - u^2}} \right) + O(\eta) \right]
\end{aligned}$$

Pour ce qui concerne l'intégrale qui figure dans le dernier membre de cette suite d'égalités il suffit de constater que

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 du \ln u \frac{d}{du} \left(\frac{1 - 2u^2}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \\
&= \ln u \left(\frac{1 - 2u^2}{\sqrt{1 - u^2}} - 1 \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{du}{u} \left(\frac{1 - 2u^2}{\sqrt{1 - u^2}} - 1 \right) \\
&= \int_0^1 du \left(\frac{2u}{\sqrt{1 - u^2}} - \frac{1 - \sqrt{1 - u^2}}{u \sqrt{1 - u^2}} \right) \\
&= \left[-2 \sqrt{1 - u^2} + \ln(1 + \sqrt{1 - u^2}) \right] \Big|_0^1 = 2 - \ln 2
\end{aligned}$$

Finalement,

$$L_{12} = \mu_0 R \left[\ln \left(\frac{8R}{d} \right) - 2 + O(d/2R) \right]$$

Exercice 4.6

Soit un solénoïde de rayon R , infiniment long, constitué de N spires par unité de longueur. Calculer le coefficient d'auto-induction par unité de longueur de ce solénoïde lorsque le milieu est le vide.

Indication : Utiliser le résultat de l'exercice 3.3. Lorsque l'enroulement du solénoïde est parcouru par un courant d'intensité constante le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est uniforme et orienté selon l'axe du solénoïde. A l'extérieur du solénoïde le champ magnétique est nul.

Solution :

L'axe du solénoïde est supposé orienté selon l'axe Ox^3 . Vu la loi d'Ampère, lorsque l'enroulement du solénoïde est parcouru par un courant d'intensité I , l'intensité du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde s'écrit

$$\check{H}_3 = NI$$

et par conséquent l'énergie magnétique par unité de longueur du solénoïde a pour valeur

$$\frac{dE_m}{dx^3} = \pi R^2 \frac{\mu_0 (\check{H}_3)^2}{2} = \pi \mu_0 R^2 N^2 \frac{I^2}{2}$$

De ce résultat on déduit que le coefficient d'auto-induction par unité de longueur vaut

$$\frac{dL}{dx^3} = \pi \mu_0 R^2 N^2$$

Exercice 4.7

Même question que dans l'exercice 4.6 mais pour une bobine toroïdale réalisée en enroulant en couche unique N spires sur un tore de rayon R et de section circulaire de rayon r , lorsque $r/R \ll 1$. La figure 4.3 décrit la situation considérée.

Comparer le résultat obtenu avec le résultat de l'exercice ex.4.6.

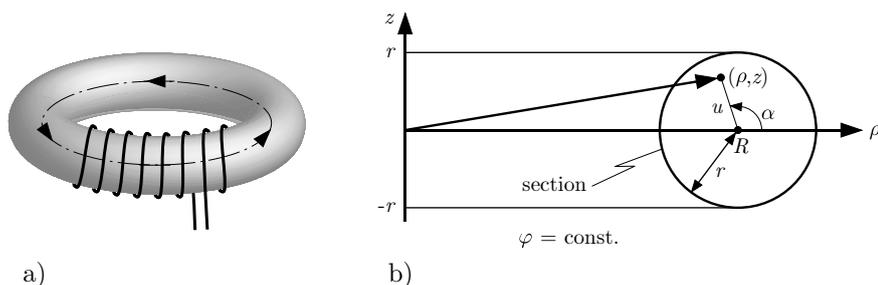


FIGURE 4.3 – La figure a) représente une bobine toroïdale. On notera que l'enroulement du fil conducteur n'a été que partiellement représenté. La figure b) représente une vue en coupe du tore selon un plan d'angle azymutal $\phi = \text{const.}$ et définit les coordonnées utiles pour traiter le problème.

Indication :

$$L \approx \frac{\mu_0 N^2 R}{2} \left[\frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{4} \frac{r^4}{R^4} + O\left(\frac{r^6}{R^6}\right) \right]$$

Solution :

Plaçons-nous en coordonnées cylindriques l'axe z coïncidant avec l'axe de symétrie cylindrique du tore. Lorsque l'enroulement qui constitue la bobine toroïdale est parcouru par un courant électrique d'intensité constante I , le champ magnétique extérieur est nul. À l'intérieur du tore ce champ a pour seule composante non-nulle la composante \check{H}_ϕ . Par raison de symétrie cette composante est indépendante de l'angle ϕ et il suit de la loi d'Ampère que

$$\check{H}_\phi = \frac{N I}{2\pi\rho}$$

Il est ici supposé que l'orientation du vecteur $\check{\mathcal{E}}_\phi(\rho, \phi, z)$ est en accord avec le sens de rotation du courant (tire-bouchon). Dans ces conditions l'énergie magnétique E_m s'écrit

$$E_m = \frac{\mu_0}{2} \int_{R-r}^{R+r} d\rho \int_{-\sqrt{r^2-(\rho-R)^2}}^{+\sqrt{r^2-(\rho-R)^2}} dz \int_0^{2\pi} \rho d\phi \left(\frac{N I}{2\pi\rho} \right)^2$$

Les intégrations relatives aux variables ϕ et z sont immédiates. Il vient

$$E_m = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2\pi} \int_{R-r}^{R+r} d\rho \frac{\sqrt{r^2 - (\rho - R)^2}}{\rho}$$

Pour la suite il convient d'effectuer le changement de variable d'intégration dicté par la relation $\rho = R + r u$. Suite à ce changement

$$E_m = \frac{\mu_0 N^2 I^2 r^2}{2\pi} \int_{-1}^{+1} du \frac{\sqrt{1-u^2}}{R+r u}$$

Or,

$$\frac{1}{R+r u} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-r)^k}{R^{k+1}} u^k \quad \text{lorsque } |ru/R| < 1$$

et par conséquent

$$E_m = \frac{\mu_0 N^2 I^2 r^2}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-r)^k}{R^{k+1}} \int_{-1}^{+1} du u^k \sqrt{1-u^2}$$

Mais seuls les termes pour lesquels k est pair apportent une contribution non nulle. Posons donc

$$E_m = \frac{\mu_0 N^2 I^2 r^2}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{2n}}{R^{2n+1}} J_n \quad \text{où } J_n = \int_{-1}^{+1} du u^{2n} \sqrt{1-u^2}$$

Or

$$\begin{aligned} J_n &= \int_{-1}^{+1} du u^{2n} \frac{-1}{3u} \frac{d}{du} (\sqrt{1-u^2})^3 \\ &= \frac{-1}{3} \left[u^{2n-1} (\sqrt{1-u^2})^3 \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} du \frac{d}{du} u^{2n-1} (\sqrt{1-u^2})^3 \right] \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^{+1} du (2n-1) u^{2n-2} (1-u^2) \sqrt{1-u^2} \\ &= \frac{2n-1}{3} (J_{n-1} - J_n) \quad , \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Autrement dit

$$2(n+1) J_n = (2n-1) J_{n-1} \quad \text{et} \quad J_0 = \frac{\pi}{2}$$

et par conséquent

$$J_n = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

Finalement, compte tenu de ce dernier résultat

$$\begin{aligned} L &= \mu_0 N^2 R \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!!} \left(\frac{r^2}{R^2}\right)^{n+1} \\ &\approx \frac{\mu_0 N^2 R}{2} \left[\frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{r^2}{R^2}\right)^2 + O\left(\left(\frac{r^2}{R^2}\right)^3\right) \right] \end{aligned}$$

Exercice 4.8

On considère un conducteur filiforme de forme circulaire de rayon a , de résistance R et de coefficient d'auto-induction L . Il est fixé selon un diamètre sur un axe de rotation fixe perpendiculaire à un champ d'induction uniforme et constant dans le temps \vec{B}_0 . La figure 4.4 illustre la situation considérée.

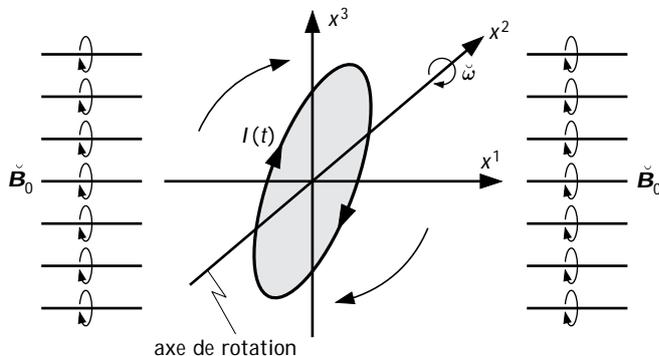


FIGURE 4.4 – Conducteur filiforme en forme de boucle circulaire, plane et rigide, en rotation autour d'un axe contenu dans le plan de cette boucle et passant par le centre de celle-ci. Cette boucle conductrice est en présence d'un champ d'induction uniforme, constant dans le temps et orthogonal à l'axe de rotation de cette boucle conductrice.

On fait tourner ce dispositif avec une fréquence ν autour de l'axe de rotation.

1. Quel est l'intensité du courant qui s'établit en régime permanent dans ce conducteur ?
2. Quel est le couple qu'il faut exercer sur l'axe de rotation pour maintenir le mouvement de rotation à fréquence ν ?
3. Quelle est la puissance qu'il faut fournir à chaque instant et en moyenne dans le temps ?

Solution :

Soit $\omega = 2\pi\nu$ la pulsation associée au mouvement de rotation de la boucle conductrice. Le flux $F(t)$ du champ d'induction \vec{B}_0 au travers de cette boucle à l'instant t s'écrit

$$F(t) = \pi a^2 \check{B}_0 \cos(\omega t) \quad \text{où} \quad \check{B}_0 = \|\vec{B}_0\|$$

où ωt est la valeur de l'angle entre la direction de ce champ d'induction et l'orientation axiale de la boucle associée, selon nos conventions, au sens positif du courant qui parcourt cette boucle. Par conséquent, en vertu de la loi d'induction de Faraday et selon (4.56),

$$L \frac{dI(t)}{dt} + R I(t) = -\frac{dF(t)}{dt} = U_0 \sin(\omega t) \quad \text{où} \quad U_0 = \omega \pi a^2 \check{B}_0$$

Puisqu'en régime permanent

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \delta)$$

l'équation différentielle qui précède implique que l'égalité

$$\omega L I_0 \cos(\omega t - \delta) + R I_0 \sin(\omega t - \delta) = U_0 \sin(\omega t)$$

soit satisfaite à chaque instant. Par conséquent il faut que

$$(\omega L \sin \delta + R \cos \delta) I_0 = U_0 \quad \text{et} \quad \omega L \cos \delta - R \sin \delta = 0$$

Autrement dit

$$\tan \delta = \frac{\omega L}{R} \quad \text{et} \quad I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

et l'intensité du courant en fonction du temps s'écrit

$$I(t) = \frac{U_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin(\omega t) - \omega L \cos(\omega t))$$

Voilà qui répond à la première question. Pour aborder la deuxième question commençons par supposer que le champ d'induction est orienté selon l'axe Ox^1 et que l'axe de rotation du conducteur circulaire est orienté selon l'axe Ox^2 . Ainsi $\vec{\omega} = \omega \check{e}_2$. Situons les points de ce dernier conducteur filiforme à l'aide de l'angle ϕ qui est l'angle que forme le vecteur \mathbf{x} qui caractérise le point considéré avec l'axe Ox^2 . Le vecteur qui situe le point associé à l'instant t à l'angle ϕ s'écrit

$$\mathbf{x}(\phi, t) = a (-\sin \phi \sin(\omega t) \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2 + \sin \phi \cos(\omega t) \mathbf{e}_3)$$

Par conséquent

$$d\mathbf{x}(\phi, t) = a (-\cos \phi \sin(\omega t) \mathbf{e}_1 - \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \phi \cos(\omega t) \mathbf{e}_3) d\phi$$

Grâce aux résultats qui précèdent on est en mesure de déterminer l'expression moment total dû aux forces de Laplace qui s'exercent sur la boucle conductrice. Elle s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(t) &= I(t) \int_0^{2\pi} \mathbf{x}(\phi, t) \wedge (d\mathbf{x}(\phi, t) \wedge \check{\mathbf{B}}_0) \\
&= I(t) \int_0^{2\pi} [-(\mathbf{x}(\phi, t) \cdot d\mathbf{x}(\phi, t)) \check{\mathbf{B}}_0 + (\mathbf{x}(\phi, t) \cdot \check{\mathbf{B}}_0) d\mathbf{x}(\phi, t)] \\
&= I(t) \int_0^{2\pi} (\mathbf{x}(\phi, t) \cdot \check{\mathbf{B}}_0) d\mathbf{x}(\phi, t)
\end{aligned}$$

puisque les vecteurs $\mathbf{x}(\phi, t)$ et $d\mathbf{x}(\phi, t)$ sont orthogonaux. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(t) &= a^2 \check{B}_0 I(t) \int_0^{2\pi} \sin \phi \sin(\omega t) \\
&\quad \times (\cos \phi \sin(\omega t) \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2 - \cos \phi \cos(\omega t) \mathbf{e}_3) d\phi \\
&= \pi a^2 \check{B}_0 I(t) \sin(\omega t) \mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

Finalement, compte tenu de la forme explicite de l'intensité du courant, on obtient l'expression

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(t) &= \pi a^2 \check{B}_0 I_0 \sin(\omega t - \delta) \sin(\omega t) \mathbf{e}_2 \\
&= \frac{\omega (\pi a^2)^2 \check{B}_0^2}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} (\cos \delta (\sin(\omega t))^2 - \sin \delta \cos(\omega t) \sin(\omega t)) \mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{M}(t) = \frac{\omega (\pi a^2)^2 \check{B}_0^2}{2} \frac{\cos \delta - \cos(2\omega t - \delta)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \mathbf{e}_2$$

Par conséquent la valeur moyenne du moment des forces au cours du temps vaut

$$\overline{\mathcal{M}} = \frac{\omega (\pi a^2)^2 \check{B}_0^2}{2} \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \mathbf{e}_2$$

La puissance instantanée qu'il faut fournir pour maintenir la vitesse de rotation a donc pour valeur

$$\begin{aligned}
P(t) &= -I(t) \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathbf{x}(\phi, t)}{\partial t} \cdot (d\mathbf{x}(\phi, t) \wedge \check{\mathbf{B}}_0) \\
&= I(t) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \mathbf{x}(\phi, t)}{\partial t} \wedge \check{\mathbf{B}}_0 \right) \cdot d\mathbf{x}(\phi, t) \\
&= I(t) \int_0^{2\pi} \left(-\omega \check{B}_0 a \sin \phi \sin(\omega t) \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \right) \cdot d\mathbf{x}(\phi, t) \\
&= I(t) \int_0^{2\pi} \omega \check{B}_0 a^2 (\sin \phi)^2 \sin(\omega t) d\phi \\
&= \pi a^2 \omega \check{B}_0 I(t) \sin(\omega t)
\end{aligned}$$

puisque

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\phi, t)}{\partial t} = -\omega a \sin \phi (\cos(\omega t) \mathbf{e}_1 + \sin(\omega t) \mathbf{e}_3)$$

Finalement, compte tenu de la forme explicite de l'intensité du courant, on parvient à l'expression finale que voici

$$P(t) = (\pi a^2)^2 \omega^2 \check{B}_0^2 \frac{R (\sin(\omega t))^2 - \omega L \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

En particulier, la puissance moyenne au cours du temps qu'il faut fournir vaut

$$\bar{P} = \frac{(\pi a^2)^2 \omega^2 \check{B}_0^2}{2} \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

On constate aisément que cela correspond à la puissance moyenne dissipée par la résistance R du conducteur filiforme en rotation.

Exercice 4.9

On considère deux tubes de courants fermés γ_1 et γ_2 réalisés par deux milieux conducteurs. Soient R_1 et R_2 les valeurs des résistances respectives de ces tubes fermés. Soient encore L_{ij} , $i, j = 1, 2$ les coefficients d'induction mutuelle et d'auto-induction correspondants. La figure 4.5 illustre la situation qui nous concerne.

Discuter les régimes de courant possibles lorsque ce dispositif n'est pas soumis à des influences extérieures. Discuter la situation particulière dans laquelle, à l'instant $t = 0$, l'intensité du courant dans le tube γ_1 vaut $I_1(0) = I_0$ alors qu'au même instant l'intensité du courant dans le tube γ_2 est nulle, donc $I_2(0) = 0$.

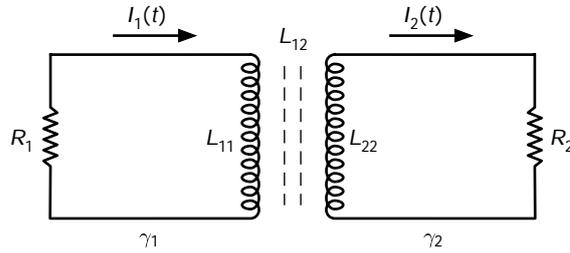


FIGURE 4.5 – Schéma de principe représentant deux tubes de courant couplés magnétiquement et sans influence capacitive.

Solution :

Notons respectivement $I_1(t)$ et $I_2(t)$ les intensités de courants qui parcourent les circuits γ_1 et γ_2 à l'instant t . Les équations qui gouvernent l'évolution de ces circuits électriques s'écrivent

$$\begin{aligned} L_{11} \frac{dI_1(t)}{dt} + L_{12} \frac{dI_2(t)}{dt} + R_1 I_1(t) &= 0 \\ L_{21} \frac{dI_1(t)}{dt} + L_{22} \frac{dI_2(t)}{dt} + R_2 I_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Si l'on résout ce système d'équations linéaires par rapport aux dérivées $dI_1(t)/dt$ et $dI_2(t)/dt$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dI_1(t)}{dt} &= \frac{-L_{22} R_1 I_1(t) + L_{12} R_2 I_2(t)}{L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}} \\ \frac{dI_2(t)}{dt} &= \frac{-L_{11} R_2 I_2(t) + L_{21} R_1 I_1(t)}{L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}} \end{aligned}$$

Pour la suite il convient de poser

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{11}} &= \frac{L_{22} R_1}{L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}} & , & & \frac{1}{\tau_{12}} &= \frac{L_{12} R_2}{L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}} \\ \frac{1}{\tau_{22}} &= \frac{L_{11} R_2}{L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}} & , & & \frac{1}{\tau_{21}} &= \frac{L_{21} R_1}{L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}} \end{aligned}$$

Le système d'équations différentielles linéaires couplées qui précède peut donc s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dI_1(t)}{dt} &= -\frac{1}{\tau_{11}} I_1(t) + \frac{1}{\tau_{12}} I_2(t) \\ \frac{dI_2(t)}{dt} &= +\frac{1}{\tau_{21}} I_1(t) - \frac{1}{\tau_{22}} I_2(t) \end{aligned}$$

Pour l'intégrer partons de la première équation différentielle ci-dessus pour exprimer $I_2(t)$ en fonction de $I_1(t)$ et de la dérivée $dI_1(t)/dt$. Il vient

$$I_2(t) = \tau_{12} \frac{dI_1(t)}{dt} + \frac{\tau_{12}}{\tau_{11}} I_1(t)$$

Ensuite remplaçons $I_2(t)$ par cette dernière expression dans la seconde des équations différentielles. On parvient ainsi sans difficulté à l'équation différentielle du second ordre que voici pour $I_1(t)$

$$\frac{d^2 I_1(t)}{dt^2} + \left(\frac{1}{\tau_{11}} + \frac{1}{\tau_{22}} \right) \frac{dI_1(t)}{dt} + \left(\frac{1}{\tau_{11}} \frac{1}{\tau_{22}} - \frac{1}{\tau_{12}} \frac{1}{\tau_{21}} \right) I_1(t) = 0$$

Il est bien connu (sauf cas exceptionnel) que la solution générale de cette dernière équation différentielle est de la forme

$$I_1(t) = I_+ \exp(-t/\tau_+) + I_- \exp(-t/\tau_-)$$

où

$$\frac{1}{\tau_{\pm}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_{11}} + \frac{1}{\tau_{22}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_{11}} - \frac{1}{\tau_{22}} \right)^2 + \frac{4}{\tau_{12}\tau_{21}}} \right)$$

Par conséquent,

$$I_2(t) = \tau_{12} \left(\frac{1}{\tau_{11}} - \frac{1}{\tau_+} \right) I_+ \exp(-t/\tau_+) + \tau_{12} \left(\frac{1}{\tau_{11}} - \frac{1}{\tau_-} \right) I_- \exp(-t/\tau_-)$$

Pour exprimer ces résultats de manière condensée introduisons finalement la grandeur a définie par la relation

$$\sinh(a) = \frac{\sqrt{\tau_{12}\tau_{21}}}{2} \left(\frac{1}{\tau_{11}} - \frac{1}{\tau_{22}} \right)$$

Avec cette convention d'écriture

$$I_2(t) = \sqrt{\frac{\tau_{12}}{\tau_{21}}} \left(-\exp(-a) I_+ \exp(-t/\tau_+) + \exp(+a) I_- \exp(-t/\tau_-) \right)$$

Discutons pour terminer la situation particulière proposée dans l'énoncé de l'exercice. Dans ce cas, vu les conditions initiales

$$I_+ + I_- = I_0 \quad \text{et} \quad -\exp(-a) I_+ + \exp(a) I_- = 0$$

Par conséquent

$$I_{\pm} = \frac{I_0}{2} \frac{\exp(\pm a)}{\cosh(a)}$$

et

$$I_2(t) = \frac{I_0}{2 \cosh a} \sqrt{\frac{\tau_{12}}{\tau_{21}}} \left(-\exp(-t/\tau_+) + \exp(-t/\tau_-) \right)$$

Exercice 4.10.★

Revenons à l'exercice 4.7. Supposons que la bobine toroïdale, réalisée en enroulant en couche unique N spires sur un tore dont l'axe forme un cercle de rayon R et dont la section est circulaire de rayon $r \ll R$, est parcourue par un courant alternatif d'intensité $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ où le symbole ω désigne la pulsation de ce courant alternatif. La figure 4.6 donne une illustration de la situation envisagée.

Apparaît-il un champ électrique au voisinage du tore ? Si oui, quel est-il à l'intérieur et à l'extérieur du tore ?

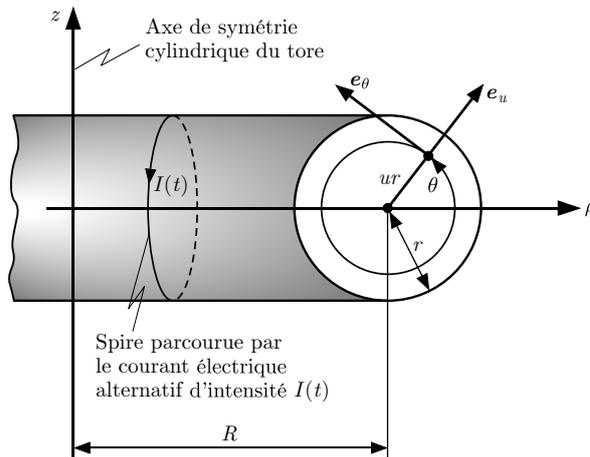


FIGURE 4.6 – Un enroulement uniforme d'un fil conducteur sous la forme d'un tore (voir 4.55 a)) est parcouru par un courant alternatif. Ce courant produit un champ magnétique variable au cours du temps à l'intérieur du tore. Par la loi d'induction de Farady ce champ produit alors un champ électrique.

Solution :

Plaçons-nous en coordonnées cylindriques, l'axe z coïncidant avec l'axe de symétrie cylindrique du tore. Il ressort de l'exercice 4.7 que lorsque l'enroulement qui constitue la bobine toroïdale est parcouru par un courant électrique d'intensité $I_0 \sin(\omega t)$, le champ magnétique extérieur est nul. A l'intérieur du tore ce champ a pour seule composante non-nulle la composante $\check{H}_\phi(\rho, \phi, z, t)$. Par raison de symétrie cette composante est indépendante de l'angle ϕ et il suit de la loi d'Ampère que

$$\check{H}_\phi(\rho, \phi, z, t) = \frac{N I_0 \sin(\omega t)}{2\pi\rho}$$

Le champ d'induction ainsi produit est dépendant du temps et il suit de la loi d'induction de Faraday qu'il induit un champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$. Plus précisément

$$\mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\mu_0 \omega \frac{N I_0 \cos(\omega t)}{2\pi\rho} \check{\mathbf{e}}_\phi(\rho, \phi, z)$$

Pour des raisons de symétrie nous devons exclure la possibilité que le champ électrique induit présente une composante non nulle selon le vecteur de base $\mathbf{e}_\phi(\rho, \phi, z)$. Autrement dit

$$E_\phi(\rho, \phi, z, t) \equiv 0.$$

Dans ces conditions, compte tenu de la formule (C.30),

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z(\rho, \phi, z, t)}{\partial \phi} \mathbf{e}_\rho(\rho, \phi, z) \\ + \left(\frac{\partial E_\rho(\rho, \phi, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(\rho, \phi, z, t)}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\phi(\rho, \phi, z) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho(\rho, \phi, z, t)}{\partial \phi} \mathbf{e}_z(\rho, \phi, z) \end{aligned}$$

Par conséquent la loi d'induction de Faraday implique les égalités

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z(\rho, \phi, z, t)}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial E_\rho(\rho, \phi, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(\rho, \phi, z, t)}{\partial \rho} &= -\mu_0 \omega \frac{N I_0 \cos(\omega t)}{2\pi \rho} \\ \frac{\partial E_\rho(\rho, \phi, z, t)}{\partial \phi} &= 0 \end{aligned}$$

En d'autres termes les composantes $E_z(\rho, z, t)$ et $E_\rho(\rho, z, t)$ du champ électrique sont indépendantes de l'angle ϕ . Par ailleurs, il faut encore que la divergence du champ électrique soit nulle. En vertu de la formule (C.29) cela implique que ces dernières composantes satisfont en outre à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho(\rho, z, t)) + \frac{\partial E_z(\rho, z, t)}{\partial z} = 0$$

Or cette condition est satisfaite si et seulement s'il existe une fonction $X(\rho, z, t)$ telle que

$$\rho E_\rho(\rho, z, t) = \frac{\partial X(\rho, z, t)}{\partial z} \quad \text{et} \quad \rho E_z(\rho, z, t) = -\frac{\partial X(\rho, z, t)}{\partial \rho}$$

Par conséquent la loi d'induction de Faraday est vérifiée dès lors que

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial X(\rho, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial X(\rho, z, t)}{\partial \rho} = -\frac{E(t)}{\rho}$$

Dans cette dernière relation on a posé

$$E(t) = \mu_0 \omega \frac{N I_0}{2\pi} \cos(\omega t)$$

Le problème se ramène donc essentiellement à la résolution de l'équation aux dérivées partielles

$$\rho \frac{\partial^2 X(\rho, z, t)}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2 X(\rho, z, t)}{\partial \rho^2} - \frac{\partial X(\rho, z, t)}{\partial \rho} = -E(t) \rho$$

Pour traiter ce problème les coordonnées u et θ définies par les relations

$$z = u r \sin \theta \quad \text{et} \quad \rho = R + u r \cos \theta \quad \text{où} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \text{et} \quad u \in [0, 1]$$

sont plus appropriées que les coordonnées initiales ρ et ϕ . Il est utile pour la suite d'introduire les vecteurs orthonormés $\mathbf{e}_u(u, \theta)$ et $\mathbf{e}_\theta(u, \theta)$, associés aux nouvelles coordonnées u et θ . Pour le point $(\rho, \phi, z) \equiv (u, \phi, \theta)$ ces vecteurs sont fournis par les relations

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_u(u, \phi, \theta) &= \cos \theta \mathbf{e}_\rho(\rho, \phi, z) + \sin \theta \mathbf{e}_z(\rho, \phi, z) \\ \mathbf{e}_\theta(u, \phi, \theta) &= -\sin \theta \mathbf{e}_\rho(\rho, \phi, z) + \cos \theta \mathbf{e}_z(\rho, \phi, z) \end{aligned}$$

Ensuite remarquons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &= r \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + r \sin \theta \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -u r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + u r \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

et qu'inversément

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} &= \frac{1}{r} \left(-\frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

En termes des coordonnées u et θ l'équation aux dérivées partielles qui précède s'écrit donc

$$\begin{aligned} &\frac{R + u r \cos \theta}{r^2} \left(\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 X(u, \theta, t)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 X(u, \theta, t)}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial X(u, \theta, t)}{\partial u} \right) \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial X(u, \theta, t)}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial X(u, \theta, t)}{\partial u} \right) = -E(t) (R + u r \cos \theta) \end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture il est commode d'introduire l'opérateur différentiel

$$D = \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u}$$

L'équation aux dérivées partielles qui précède peut donc encore s'écrire

$$\begin{aligned} D X(u, \theta, t) + \frac{r}{R} \left[u \cos \theta D + \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial u} \right] X(u, \theta, t) \\ = -E(t) r^2 - \frac{r}{R} E(t) r^2 u \cos \theta \end{aligned}$$

Avant d'aborder le traitement de cette équation aux dérivées partielles déterminons encore les expressions des composantes $E_u(u, \phi, \theta)$ et $E_\theta(u, \phi, \theta)$ du champ électrique. Elles s'écrivent

$$\begin{aligned} E_u(u, \phi, \theta, t) &= \cos \theta E_\rho(\rho, \phi, z, t) + \sin \theta E_z(\rho, \phi, z, t) \\ &= \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial X(\rho, \phi, z, t)}{\partial z} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial X(\rho, \phi, z, t)}{\partial \rho} \\ &= \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{1}{r} \left(\frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial u} \right) X(u, \phi, \theta, t) \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{1}{r} \left(-\frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial u} \right) X(u, \phi, \theta, t) \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial X(u, \phi, \theta, t)}{\partial \theta} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_\theta(u, \phi, \theta, t) &= -\sin \theta E_\rho(\rho, \phi, z, t) + \cos \theta E_z(\rho, \phi, z, t) \\ &= -\frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial X(\rho, \phi, z, t)}{\partial z} - \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial X(\rho, \phi, z, t)}{\partial \rho} \\ &= -\frac{\sin \theta}{\rho} \frac{1}{r} \left(\frac{\cos \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial u} \right) X(u, \phi, \theta, t) \\ &\quad - \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{1}{r} \left(-\frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial u} \right) X(u, \phi, \theta, t) \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial X(u, \phi, \theta, t)}{\partial u} \end{aligned}$$

Notons ensuite que la symétrie du système impose que la composante $E_\rho(\rho, \phi, z, t)$ est impaire par rapport à la variable z alors que la composante $E_z(\rho, \phi, z, t)$ est paire par rapport à cette même variable. Par conséquent on peut en conclure que la composante $E_u(u, \phi, \theta, t)$ est une fonction impaire de la variable θ alors que la composante $E_\theta(u, \phi, \theta, t)$ est une fonction paire de cette même variable. Quant aux conditions aux limites auxquelles la fonction $X(u, \phi, \theta, t)$ est assujétie, elles sont les suivantes. La composante $E_u(u, \phi, \theta, t)$ du champ électrique est identiquement nulle à la surface du tore. Autrement dit

$$E_u(u, \phi, \theta, t) \Big|_{u=1} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial X(u, \phi, \theta, t)}{\partial \theta} \Big|_{u=1} = 0 \quad , \quad \forall \theta \text{ et } \phi$$

Pour traiter le problème posé développons la fonction $X(u, \phi, \theta, t)$ en série de puissance du rapport r/R . Posons

$$X(u, \phi, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(u, \phi, \theta, t) \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

L'introduction de ce développement dans l'équation aux dérivées partielles pour la fonction $X(u, \phi, \theta, t)$ suivie de l'identification des termes de mêmes puissance conduit aux relations de récurrence que voici. Pour $n = 0$

$$D X_0(u, \phi, \theta, t) = -E(t) r^2$$

et pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} & D X_n(u, \phi, \theta, t) + \left[u \cos \theta D + \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial u} \right] X_{n-1}(u, \phi, \theta, t) \\ &= -E(t) r^2 \delta_{1n} u \cos \theta \end{aligned}$$

Par conséquent pour $n = 0$ il est aisé de constater que

$$X_0(u, \phi, \theta, t) = -E(t) r^2 \frac{u^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{0k} u^k \cos(k \theta)$$

où les symboles a_{0k} , $k = 1, 2, \dots$ désignent des constantes arbitraires. On notera que la constante a_{00} ne joue aucun rôle et peut être écartée. Quant aux conditions aux limites elles imposent les égalités

$$\frac{\partial X_0(1, \phi, \theta, t)}{\partial \theta} = - \sum_{k=1}^{\infty} k a_{0k} \sin(k \theta) \equiv 0 \quad \text{d'où} \quad a_{0k} = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Finalement

$$X_0(u, \phi, \theta, t) = -E(t) r^2 \frac{u^2}{4}$$

Considérons ensuite le cas $n = 1$. On a

$$\begin{aligned} & D X_1(u, \phi, \theta, t) + \left(u \cos \theta D + \frac{\sin \theta}{u} \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial u} \right) X_0(u, \phi, \theta, t) \\ &= -E(t) r^2 u \cos \theta \end{aligned}$$

Donc, compte tenu de l'expression de $X_0(u, \phi, \theta, t)$ obtenue précédemment, il vient

$$D X_1(u, \phi, \theta, t) = -\frac{E(t) r^2}{2} u \cos \theta$$

Par conséquent

$$X_1(u, \phi, \theta, t) = -\frac{E(t) r^2}{2} \frac{u^3}{8} \cos \theta + \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} u^k \cos(k\theta)$$

où les symboles a_{1k} , $k = 1, 2, \dots$ désignent des constantes arbitraires. Les conditions aux limites quant à elles imposent que

$$\frac{\partial X_1(1, \phi, \theta, t)}{\partial \theta} = \frac{E(t) r^2}{2} \frac{1}{8} \sin \theta - \sum_{k=1}^{\infty} k a_{1k} \sin(k\theta) \equiv 0$$

$$\text{et par conséquent } a_{11} = \frac{E(t) r^2}{2} \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad a_{1k} = 0 \quad \forall k > 1$$

Par conséquent

$$X_1(u, \phi, \theta, t) = -\frac{E(t) r^2}{2} \frac{u^3 - u}{8} \cos \theta$$

Lorsque $n = 2$ il vient

$$D X_2(u, \phi, \theta, t) = \frac{E(t) r^2}{4} \left[3 \left(\frac{u}{2}\right)^2 \cos(2\theta) + \frac{2u^2 + 1}{4} \right]$$

et par conséquent

$$X_2(u, \phi, \theta, t) = \frac{E(t) r^2}{4} \left[\left(\frac{u}{2}\right)^4 \cos(2\theta) + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{2}\right)^4 + \frac{1}{4} \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right] + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} u^k \cos(k\theta)$$

où les symboles a_{2k} , $k = 1, 2, \dots$ désignent des constantes arbitraires. Les conditions aux limites quant à elles imposent que

$$\frac{\partial X_2(1, \phi, \theta, t)}{\partial \theta} = -\frac{E(t) r^2}{4} \frac{1}{2^3} \sin(2\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} k a_{2k} \sin(k\theta) \equiv 0$$

$$\text{et par conséquent } a_{22} = -\frac{E(t) r^2}{4} \frac{1}{2^4} \quad \text{et} \quad a_{2k} = 0 \quad \forall k \neq 2$$

Finalement,

$$X_2(u, \phi, \theta, t) = \frac{E(t) r^2}{4} \left[\frac{u^4 - u^2}{2^4} \cos(2\theta) + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{2}\right)^4 + \frac{1}{4} \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]$$

Et ainsi de suite, pour $n = 3, 4, \dots$

Enfin, pour les composantes $E_u(u, \phi, \theta, t)$ et $E_\theta(u, \phi, \theta, t)$ du champ électrique induit on obtient les expressions qui suivent

$$\begin{aligned}
E_u(u, \phi, \theta, t) &= \frac{1}{R + u} \frac{1}{r \cos \theta} \frac{1}{u r} \frac{\partial X(u, \theta, t)}{\partial \theta} \\
&= \frac{E(t)}{1 + u (r/R) \cos \theta} \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{u^2 - 1}{2^4} \sin \theta - \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{u^3 - u}{2^5} \sin(2\theta) + \dots \right] \\
&= E(t) \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{u^2 - 1}{2^4} \sin \theta + O((r/R)^3) \right]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E_\theta(u, \phi, \theta, t) &= -\frac{1}{R + u} \frac{1}{r \cos \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial X(u, \theta, t)}{\partial u} \\
&= \frac{E(t)}{1 + u (r/R) \cos \theta} \left[\frac{r}{R} \frac{u}{2} + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{3u^2 - 1}{2^4} \cos \theta \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{r}{R}\right)^3 \left(\frac{2u^3 - u}{2^5} \cos(2\theta) + \frac{u^3 + u}{2^3} \right) + \dots \right] \\
&= E(t) \left[\frac{r}{R} \frac{u}{2} - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{5u^2 + 1}{2^4} \cos \theta + O((r/R)^3) \right]
\end{aligned}$$

A l'aide des résultats qui précèdent une première esquisse de la forme des lignes de champ du champ électrique peut être aisément faite. Pour conclure on notera que le champ électrique sur l'axe du tore, c'est-à-dire en $(u = 0, \phi, \theta) \equiv (R, \phi, z = 0)$ est orienté selon l'axe Oz et la valeur de celui-ci est

$$\mathbf{E}(R, \phi, 0, t) = E(t) \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{-1}{2^4} + O((r/R)^3) \right] \mathbf{e}_z(R, \phi, 0)$$

Exercice 4.11

Montrer que le coefficient d'auto-induction par unité de longueur d'un conducteur rectiligne infini placé dans le vide, de section circulaire de rayon r et de perméabilité magnétique μ est infini. Plus précisément montrer que ce coefficient dL/dx est de la forme

$$\frac{dL}{dx} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right] \rightarrow +\infty$$

Ensuite considérer le même problème mais pour un fil conducteur de section circulaire de rayon r et de perméabilité magnétique μ qui forme une boucle circulaire dont l'axe forme un cercle de rayon R . Montrer que dans ce cas le coefficient d'auto-induction par unité de longueur vaut

$$\frac{L}{2\pi R} = \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln\left(\frac{8R}{r}\right) - 2 \right)$$

Indications : On supposera que la distribution du courant dans chaque section du fil est uniforme.

Solution :

Dans la première question, moyennant l'hypothèse de la symétrie cylindrique, il suit de la loi d'Ampère (3.22) que le champ magnétique produit par la distribution de courant est, en coordonnées cylindriques, de la forme

$$H_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^\rho \frac{I}{\pi r^2} 2\pi\rho' d\rho' = \frac{I}{2\pi\rho} \frac{\rho^2}{r^2} \quad \text{lorsque } \rho \leq r$$

$$H_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{I}{2\pi\rho} \quad \text{lorsque } r \leq \rho$$

L'énergie magnétique par unité de longueur s'écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dx} &= \int_0^r \frac{\mu H_\phi(\rho, \phi, z)^2}{2} 2\pi\rho d\rho + \int_r^{+\infty} \frac{\mu_0 H_\phi(\rho, \phi, z)^2}{2} 2\pi\rho d\rho \\ &= \frac{I^2}{2} \left[\int_0^r \frac{\mu}{2\pi} \frac{\rho^3 d\rho}{r^4} + \int_r^{+\infty} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{d\rho}{\rho} \right] \\ &= \frac{I^2}{2} \left[\frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \right] = \frac{1}{2} \frac{dL}{dx} I^2 \end{aligned}$$

Considérons maintenant le second cas. Dans ce second cas il est préférable de recourir à la formule (4.42). Posons

$$\mathbf{x}(\rho_1, \phi_1, z_1) = \rho_1 \cos \phi_1 \mathbf{e}_1 + \rho_1 \sin \phi_1 \mathbf{e}_2 + z_1 \mathbf{e}_3$$

et

$$\mathbf{y}(\rho_2, \phi_2, z_2) = \rho_2 \cos \phi_2 \mathbf{e}_1 + \rho_2 \sin \phi_2 \mathbf{e}_2 + z_2 \mathbf{e}_3$$

puis

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho_1} \frac{d\mathbf{x}(\rho_1, \phi_1, z_1)}{d\phi_1} = -\sin \phi_1 \mathbf{e}_1 + \cos \phi_1 \mathbf{e}_2$$

et

$$\mathbf{e}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\rho_2} \frac{d\mathbf{x}(\rho_2, \phi_2, z_2)}{d\phi_2} = -\sin \phi_2 \mathbf{e}_1 + \cos \phi_2 \mathbf{e}_2$$

Procédons encore au changement de variables d'intégration que voici

$$\begin{aligned} \rho_1 = R + r u_1 \cos \alpha_1 \quad , \quad z_1 = r u_1 \sin \alpha_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\rho_1, z_1)}{\partial(u_1, \alpha_1)} &= r u_1 \\ \rho_2 = R + r u_2 \cos \alpha_2 \quad , \quad z_2 = r u_2 \sin \alpha_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\rho_2, z_2)}{\partial(u_2, \alpha_2)} &= r u_2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
L &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\pi^2} \\
&\times \int_0^1 du_1 \int_0^{2\pi} u_1 d\alpha_1 \int_0^{2\pi} \rho_1 d\phi_1 \int_0^1 du_2 \int_0^{2\pi} u_2 d\alpha_2 \int_0^{2\pi} \rho_2 d\phi_2 \\
&\times \frac{\cos(\phi_1 - \phi_2)}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2 + 2\rho_1\rho_2(1 - \cos(\phi_1 - \phi_2))}}
\end{aligned}$$

Mais l'intégration par rapport à l'un des angles ϕ_1 ou ϕ_2 , celle effectuée en seconde position, est triviale. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}
L &= \frac{\mu_0}{2} \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 du_1 \int_0^{2\pi} u_1 d\alpha_1 \int_0^1 du_2 \int_0^{2\pi} u_2 d\alpha_2 \\
&\times \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\rho_1 \rho_2 \cos \phi}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2 + 4\rho_1\rho_2(1 - \cos \phi)/2}}
\end{aligned}$$

Or, dans le cadre de l'exercice 4.5., il a été établi l'expression approchée

$$\int_0^{2\pi} d\phi \frac{\cos \phi}{\sqrt{\eta^2 + (1 - \cos \phi)/2}} = 4 \left(\ln \left(\frac{4}{\eta} \right) - 2 + O(\eta) \right) \quad \text{lorsque } |\eta| \ll 1$$

Par conséquent, si l'on convient de poser

$$\eta = \sqrt{\frac{(z_1 - z_2)^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2}{4\rho_1\rho_2}}$$

alors on peut écrire l'expression approchée que voici

$$\begin{aligned}
L &= \mu_0 \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 du_1 \int_0^{2\pi} u_1 d\alpha_1 \int_0^1 du_2 \int_0^{2\pi} u_2 d\alpha_2 \\
&\times \sqrt{\rho_1 \rho_2} \left(\ln \left(8 \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(z_1 - z_2)^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2}} \right) - 2 + O(\eta) \right)
\end{aligned}$$

On remarque ensuite que

$$\sqrt{\rho_1 \rho_2} = R \sqrt{1 + (r/R) (u_1 \cos \alpha_1 + u_2 \cos \alpha_2) + (r/R)^2 u_1 u_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}$$

et que

$$\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2} = r \sqrt{u_1^2 + u_2^2 - 2 u_1 u_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_1)}$$

Si l'on ne retient que les termes dominants jusqu'à l'ordre $O(1)$ alors

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\rho_1 \rho_2} \ln \left(8 \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(z_1 - z_2)^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2}} \right) \\
&\approx R \ln \left(\frac{8R}{r} \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 - 2 u_1 u_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_1)}} \right)
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$L = \mu_0 \frac{R}{\pi^2} \int_0^1 du_1 \int_0^{2\pi} u_1 d\alpha_1 \int_0^1 du_2 \int_0^{2\pi} u_2 d\alpha_2 \\ \times \left[\ln\left(\frac{8R}{r}\right) - \frac{1}{2} \ln(u_1^2 + u_2^2 - 2u_1 u_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)) - 2 + O(\eta) \right]$$

Mais l'intégration par rapport à l'un des angles α_1 ou α_2 , celle effectuée en seconde position, est triviale. Nous pouvons donc écrire

$$L = \mu_0 \frac{2R}{\pi} \int_0^1 du_1 \int_0^{2\pi} u_1 d\alpha \int_0^1 du_2 u_2 \\ \times \left[\ln\left(\frac{8R}{r}\right) - \frac{1}{2} \ln(u_1^2 + u_2^2 - 2u_1 u_2 \cos \alpha) - 2 + O(\eta) \right] \\ = \mu_0 R \left[\ln\left(\frac{8R}{r}\right) - 2 + C + O\left(\frac{r}{R}\right) \right]$$

où le symbole C désigne la constante numérique

$$C = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 du_1 \int_0^{2\pi} u_1 d\alpha \int_0^1 du_2 u_2 \ln(u_1^2 + u_2^2 - 2u_1 u_2 \cos \alpha)$$

Exercice 4.12.★

La **roue de Barlow** est issue d'une première tentative de réalisation d'un moteur électrique. Cette expérience fut imaginée et réalisée par le mathématicien et physicien anglais *Peter Barlow* en 1822. Un disque métallique conducteur est assujéti à un axe de rotation fixe également conducteur. La partie inférieure de cette roue trempe dans un bain de mercure. En outre, elle est en présence d'un champ d'induction indépendant du temps et que l'on peut supposer uniforme. L'orientation de ce champ d'induction est celle de l'axe de rotation précédemment évoqué. Une différence de potentiel entre cet axe de rotation et le bain de mercure étant maintenue, la roue se met en rotation. Expliquer les raisons de ce phénomène physique. La figure 4.7 donne une description schématique de l'expérience de Barlow.

Solution :

Pour traiter ce problème il convient de se placer en coordonnées cylindriques, l'axe de rotation de la roue coïncidant avec l'axe Oz . L'origine O de cet axe coïncide avec le centre de la roue.

Il faut considérer une situation de régime stationnaire. Dans une telle situation la roue tourne avec une vitesse angulaire constante $\dot{\phi} = \check{\omega}$. Notons $\check{\omega} = \check{\omega} \check{e}_z(\rho, \phi, z)$ le vecteur axial de rotation correspondant. Le champ d'induction appliqué \check{B}_0 est orienté selon l'axe Oz et la force de Lorentz subie par un électron de charge électrique e , situé au point \mathbf{x} et animé d'une vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, s'écrit

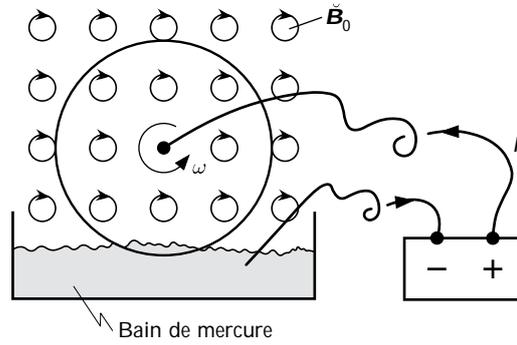


FIGURE 4.7 – Figure représentant l’expérience de la roue de Barlow. Une roue métallique conductrice est assujétie à un axe de rotation fixe. La partie inférieure de cette roue trempe dans un bain de mercure. En outre elle est en présence d’un champ d’induction que l’on peut supposer uniforme et dont l’orientation est celle de l’axe de rotation précédemment évoqué. Une différence de potentiel entre cet axe de rotation et le bain de mercure étant maintenue la roue se met en rotation.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = e (\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \wedge \check{\mathbf{B}}_0)$$

Mais les électrons entrent en collision avec les atomes qui constituent le métal dont est faite la roue et qui, par conséquent, en sont solidaires. Or ces collisions permettent un transfert de quantité de mouvement entre les électrons et la roue, ou encore produisent en moyenne une force qui tend à faire tourner la roue de Barlow autour de l’axe. En première approximation on assimiler l’effet moyen de ces collisions à une force de frottement subie par les électrons de la part du milieu qui constitue la roue. Autrement dit, on peut supposer que cette force de frottement peut être exprimée sous la forme

$$\mathbf{F}_{fr}(\mathbf{x}) = -\lambda (\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \check{\omega} \wedge \mathbf{x})$$

où λ joue le rôle de coefficient de frottement. En fait, si σ désigne la conductivité de la roue et si $\rho_{\text{électrons}}$ désigne la densité électronique au sein de celle-ci, alors on dispose de la relation que voici entre ce coefficient de frottement et la résistivité du milieu qui forme la roue

$$\lambda = \frac{e^2 \rho_{\text{électrons}}}{\sigma}$$

Or en régime stationnaire $\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_{fr}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ et par conséquent

$$e (\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \wedge \check{\mathbf{B}}_0) = \lambda (\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \check{\omega} \wedge \mathbf{x})$$

Soient $\mathbf{e}_\rho(\rho, \phi, z)$ et $\mathbf{e}_\phi(\rho, \phi, z)$ les vecteurs de base associés aux coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) . Alors

$$e (E_\rho(\rho, \phi, z) + v_\phi(\rho, \phi, z) \check{B}_0) = \lambda v_\rho(\rho, \phi, z)$$

et

$$e (E_\phi(\rho, \phi, z) - v_\rho(\rho, \phi, z) \check{B}_0) = \lambda (v_\phi(\rho, \phi, z) - \check{\omega} \rho)$$

De ces relations il suit immédiatement que

$$v_\rho(\rho, \phi, z) = \frac{(\lambda/e) E_\rho(\rho, \phi, z) + \check{B}_0 (E_\phi(\rho, \phi, z) + (\lambda/e) \check{\omega} \rho)}{\check{B}_0^2 + (\lambda/e)^2}$$

et

$$v_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{-\check{B}_0 E_\rho(\rho, \phi, z) + (\lambda/e) (E_\phi(\rho, \phi, z) + (\lambda/e) \check{\omega} \rho)}{\check{B}_0^2 + (\lambda/e)^2}$$

En première approximation on peut supposer que la composante $E_\phi(\rho, \phi, z)$ du champ électrique va jouer un rôle négligeable. Plus précisément on peut supposer que le champ électrique dérive d'un potentiel électrique de la forme

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \Phi_0 \frac{\ln \rho/R}{\ln R_0/R}$$

où R_0 est le rayon de l'axe qui supporte la roue et R le rayon de la roue. La grandeur Φ_0 est le potentiel électrique auquel est assujetti l'axe de la roue de Barlow le bain de mercure étant assujetti au potentiel $\Phi = 0$. Il est aisé de vérifier que ce dernier potentiel satisfait à l'équation de Laplace dans la région $R_0 \leq \rho \leq R$. Dans ces conditions

$$E_\rho(\rho, \phi, z) = \frac{A}{\rho} \quad \text{et} \quad E_\phi(\rho, \phi, z) = E_z(\rho, \phi, z) \equiv 0$$

Dans ces expressions on a posé

$$A = \frac{\Phi_0}{\ln R/R_0}$$

Venons-en maintenant aux forces qu'exercent les électrons sur les noyaux. En moyenne

$$\begin{aligned} F_\phi(\rho) &= \lambda (v_\phi(\rho) - \check{\omega} \rho) \\ &= \lambda \left(\frac{-\check{B}_0 A/\rho + (\lambda/e)^2 \check{\omega} \rho}{\check{B}_0^2 + (\lambda/e)^2} - \check{\omega} \rho \right) \\ &= -\lambda \frac{\check{B}_0 A/\rho + \check{B}_0^2 \check{\omega} \rho}{\check{B}_0^2 + (\lambda/e)^2} \end{aligned}$$

Par conséquent la densité de forces correspondante s'écrit

$$f_\phi(\rho) = -\rho_{\text{électrons}} \lambda \frac{\check{B}_0 A/\rho + \check{B}_0^2 \check{\omega} \rho}{\check{B}_0^2 + (\lambda/e)^2}$$

et la composante selon l'axe de rotation \check{e}_z du moment des forces exercées par les électrons sur les noyaux prend la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_z &= \int_{\Delta_{\text{Roue}}} dz d\phi \rho d\rho (\rho f_\phi(\rho)) \\
&= \int_{\Delta_{\text{Roue}}} dz d\phi \rho d\rho \left(-\rho_{\text{électrons}} \lambda \frac{\check{B}_0 A + \check{B}_0^2 \check{\omega} \rho^2}{\check{B}_0^2 + (\lambda/e)^2} \right)
\end{aligned}$$

Le symbole Δ_{Roue} désigne la partie de la roue dans laquelle circulent les courants entre l'axe de la roue et le bain de mercure. Ce domaine d'intégration est "grosso modo" le secteur étroit qui contient des rayons de la roue aboutissant à des points plongeant dans le mercure. Mais au moment de forces \mathcal{M}_z s'oppose le moment de force $-\Lambda \check{\omega}$ dû au frottement de l'axe de rotation de la roue de Barlow. Ainsi, en régime stationnaire

$$\mathcal{M}_z - \Lambda \check{\omega} = 0 \quad \text{où} \quad \Lambda > 0$$

Par conséquent

$$-\rho_{\text{électrons}} \lambda \left(\frac{\check{B}_0 A}{\check{B}_0^2 + (\lambda/e)^2} \Gamma_0 + \frac{\check{B}_0^2}{\check{B}_0^2 + (\lambda/e)^2} \Gamma_2 \check{\omega} \right) - \Lambda \check{\omega} = 0$$

Dans cette expression les symboles Γ_0 et Γ_2 désignent les facteurs géométriques suivants

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \int_{\Delta_{\text{Roue}}} dz d\phi \rho d\rho \\
\Gamma_2 &= \int_{\Delta_{\text{Roue}}} dz d\phi \rho d\rho \rho^2
\end{aligned}$$

Finalement, en régime stationnaire, la vitesse de rotation angulaire de la roue est donnée par l'expression que voici

$$\check{\omega} = \frac{-\rho_{\text{électrons}} \lambda \check{B}_0 A \Gamma_0}{\Lambda (\check{B}_0^2 + (\lambda/e)^2) + \rho_{\text{électrons}} \lambda \check{B}_0^2 \Gamma_2}$$

A l'aide des expressions des composantes de la vitesse des électrons il est possible de déterminer le chemin suivi par les électrons. L'angle de ce chemin avec le faisceau de cercles centrés sur l'axe de rotation vaut

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho(\phi)}{\rho d\phi} &= \frac{v_\rho(\rho, \phi, z)}{v_\phi(\rho, \phi, z)} = \frac{(\lambda/e) E_\rho(\rho, \phi, z) + \check{B}_0 (E_\phi(\rho, \phi, z) + (\lambda/e) \check{\omega} \rho)}{-\check{B}_0 E_\rho(\rho, \phi, z) + (\lambda/e) (E_\phi(\rho, \phi, z) + (\lambda/e) \check{\omega} \rho)} \\
&\cong \frac{(\lambda/e) A/\rho + (\lambda/e) \check{B}_0 \check{\omega} \rho}{-\check{B}_0 A/\rho + (\lambda/e)^2 \check{\omega} \rho}
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
d\phi &= \frac{d\rho}{\rho} \frac{-\check{B}_0 A + (\lambda/e)^2 \check{\omega} \rho^2}{(\lambda/e) A + (\lambda/e) \check{B}_0 \check{\omega} \rho^2} \\
&= \left(-\frac{\check{B}_0}{(\lambda/e)} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{(\lambda/e)} \frac{((\lambda/e)^2 + \check{B}_0^2) \check{\omega} \rho}{A + \check{B}_0 \check{\omega} \rho^2} \right) d\rho
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{e \check{B}_0}{\lambda} \\
\text{et} \\
a^2 &= -\frac{A}{\check{\omega} \check{B}_0} = \frac{\Lambda (\check{B}_0^2 + (\lambda/e)^2) + \rho_{\text{électrons}} \lambda \check{B}_0^2 \Gamma_2}{\rho_{\text{électrons}} \lambda \check{B}_0^2 \Gamma_0} \\
&= \frac{\Lambda (\alpha^2 + 1) + \rho_{\text{électrons}} \lambda \alpha^2 \Gamma_2}{\rho_{\text{électrons}} \lambda \alpha^2 \Gamma_0}
\end{aligned}$$

et supposons que l'intensité \check{B}_0 du champ magnétique est suffisamment faible pour que $a \geq R$. Dans ces conditions

$$d\phi = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha^2 + 1}{2 \alpha} \frac{-2 \rho}{a^2 - \rho^2} d\rho$$

et si la constante d'intégration est choisie de telle manière que $\phi(R) = 0$, alors

$$\phi = -\alpha \ln \left(\frac{\rho}{R} \right) + \frac{1 + \alpha^2}{2 \alpha} \ln \left(\frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - R^2} \right)$$

Finalement la trajectoire des électrons qui aboutit au bain de mercure est donnée par la relation

$$\exp(\alpha \phi) = \left(\frac{R}{\rho} \right)^{\alpha^2} \left(\sqrt{\frac{1 - \rho^2/a^2}{1 - R^2/a^2}} \right)^{\alpha^2 + 1}$$

La situation importante du point de vue de la physique est celle pour laquelle la grandeur a est beaucoup plus grande que R . Dans ces conditions, en première approximation,

$$\rho(\phi) = R \exp \left(-\frac{\phi}{\alpha} \right)$$

La trajectoire des électrons est une spirale logarithmique. La variation de l'angle ϕ sur cette trajectoire, c'est-à-dire l'angle de celle-ci au niveau de l'axe de rotation de la roue de Barlow, prend alors la valeur

$$\phi_0 = \alpha \ln \left(\frac{R}{R_0} \right)$$

Exercice 4.13

On considère une ligne de transmission de signal électrique dont chaque portion de longueur Δx peut être assimilée à un quadripôle qui présente la structure décrite par la figure 4.8. Déterminer l'équation différentielle qui régit la forme de la transformée de Fourier par rapport au temps $U(x, \omega)$ du potentiel $U(x, t)$ pour un signal de pulsation ω et à la limite où les quadripôles peuvent être assimilés à un milieu continu, c'est-à-dire à la limite $|\Delta x| \rightarrow 0$.

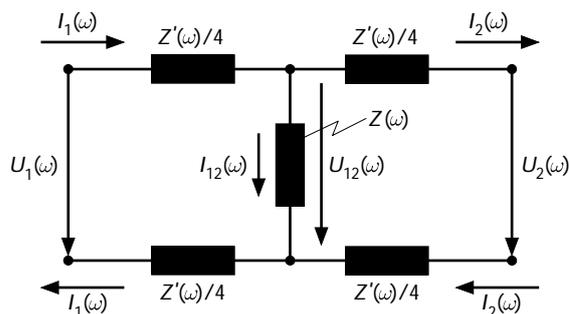


FIGURE 4.8 – Schéma de principe du quadripôle considéré dans ce problème.

UNE REMARQUE IMPORTANTE : Les coefficients $Z(\omega)$ ou $Z'(\omega)$ fixent la relation entre la transformée de Fourier $U(\omega)$ de la tension $U(t)$ aux bornes de l'élément considéré et entre la transformée de Fourier $I(\omega)$ de l'intensité $I(t)$ du courant qui le parcourt. Ces grandeurs $Z(\omega)$ et $Z'(\omega)$ **ne sont pas, à proprement parler, des impédances au sens de la sous section 4.8.1** elles en sont les conjugués complexes. L'origine de cette différence réside dans le fait que les transformées de Fourier de la tension $U(t)$ et de l'intensité du courant $I(t)$ sont définies par les relations (Voir (4.129) et (4.137))

$$U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad \text{et} \quad I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad , \text{etc.}$$

alors que la notion d'impédance introduite à la sous section 4.8.1 repose sur une description de la tension $U(t)$ et de l'intensité du courant $I(t)$ d'un signal de pulsation ω à l'aide de la convention d'écriture suivante

$$U(t) = \text{Im}(\hat{U} \exp(+i\omega t)) \quad \text{et} \quad I(t) = \text{Im}(\hat{I} \exp(+i\omega t)) \quad , \text{etc.}$$

Ainsi, pour un signal de pulsation ω on dispose des deux écritures que voici

$$\begin{aligned} U(t) &= U(\omega) \exp(-i\omega t) + U(\omega)^* \exp(+i\omega t) \\ &= \frac{1}{2i} (\hat{U} \exp(+i\omega t) - \hat{U}^* \exp(-i\omega t)) \end{aligned}$$

et similairement

$$\begin{aligned} I(t) &= I(\omega) \exp(-i\omega t) + I(\omega)^* \exp(+i\omega t) \\ &= \frac{1}{2i} (\hat{I} \exp(+i\omega t) - \hat{I}^* \exp(-i\omega t)) \end{aligned}$$

Les amplitudes complexes associées à ces deux modes écritures sont donc liées par les relations

$$U(\omega) = -\frac{\widehat{U}^*}{2i} \quad \text{et} \quad I(\omega) = -\frac{\widehat{I}^*}{2i}$$

et par conséquent

$$Z(\omega) = \frac{U(\omega)}{I(\omega)} = \frac{-\widehat{U}^*/2i}{-\widehat{I}^*/2i} = \left(\frac{\widehat{U}}{\widehat{I}}\right)^* \quad \text{ou encore} \quad \widehat{U} = (Z(\omega))^* \widehat{I}$$

Ces distinctions doivent être gardées présentes à l'esprit lors des développements qui concernent les exercices 4.13 à 4.15 inclus. Elles nous sont imposées par le fait que la définition de la transformée de Fourier par rapport au temps la plus fréquemment utilisée en physique et la définition de l'impédance utilisée dans la pratique de l'ingénieur sont basées sur des conventions de phase de signes opposés.

Au cours des développements qui concernent les exercices 4.13 à 4.15, afin d'éviter toute confusion, les grandeurs $Z(\omega)$ qui interviennent seront appelées *impédances de Fourier*. Elles sont, rappelons-le, les conjugués complexes des impédances au sens usuel.

Solution :

Les symboles $U_1(\omega)$ et $U_2(\omega)$ désignent les amplitudes complexes des tensions d'entrée et de sortie du quadripôle et les symboles $I_1(\omega)$ et $I_2(\omega)$ désignent les amplitudes complexes des intensités des courants correspondants. Compte tenu des conventions d'écriture adoptées dans le schéma de la figure 4.8, les lois de Kirchhoff se traduisent par les relations

$$\begin{aligned} U_1(\omega) &= U_{12}(\omega) + \frac{1}{2} Z'(\omega) I_1(\omega) & , & & U_2(\omega) &= U_{12}(\omega) - \frac{1}{2} Z'(\omega) I_2(\omega) \\ I_{12}(\omega) &= I_1(\omega) - I_2(\omega) & \text{et} & & U_{12}(\omega) &= Z(\omega) I_{12}(\omega) \end{aligned}$$

La démarche qu'il faut adopter est similaire à celle qui fut adoptée à la sous-section (4.7.1). Après élimination des grandeurs $U_{12}(\omega)$ et $I_{12}(\omega)$ dans les relations qui précèdent remplaçons les tensions $U_1(\omega)$ et $U_2(\omega)$ et les intensités des courants $I_1(\omega)$ et $I_2(\omega)$ par les expressions de ces grandeurs en fonction des grandeurs $U(\omega)$, $I(\omega)$, $\Delta U(\omega)$ et $\Delta I(\omega)$ définies comme suit

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \frac{U_1(\omega) + U_2(\omega)}{2} & , & & I(\omega) &= \frac{I_1(\omega) + I_2(\omega)}{2} \\ \Delta U(\omega) &= U_2(\omega) - U_1(\omega) & \text{et} & & \Delta I(\omega) &= I_2(\omega) - I_1(\omega) \end{aligned}$$

On parvient ainsi aux relations que voici

$$\begin{aligned} U(\omega) + \frac{\Delta U(\omega)}{2} &= -Z(\omega) \Delta I(\omega) - \frac{Z'(\omega)}{2} \left(I(\omega) + \frac{\Delta I(\omega)}{2} \right) \\ U(\omega) - \frac{\Delta U(\omega)}{2} &= -Z(\omega) \Delta I(\omega) + \frac{Z'(\omega)}{2} \left(I(\omega) - \frac{\Delta I(\omega)}{2} \right) \end{aligned}$$

La somme et la différence prises membre à membre de ces deux dernières équations conduisent à deux nouvelles équations qui s'écrivent

$$U(\omega) = -\left(Z(\omega) + \frac{Z'(\omega)}{4}\right) \Delta I(\omega) \quad \text{et} \quad \Delta U(\omega) = -Z'(\omega) I(\omega)$$

Venons-en maintenant au passage à la limite du continu. Il convient donc d'introduire une notion d'*impédance de Fourier* par unité de longueur. L'*impédance de Fourier* $Z'(\omega)$ est proportionnelle à la longueur Δx alors que l'*impédance de Fourier* $Z(\omega)$ est inversement proportionnelle à cette même longueur. En effet, lorsque cette longueur tend à s'annuler cette dernière *impédance de Fourier* doit tendre vers l'infini. Dans ces conditions il convient de poser

$$Z'(\omega) = z'(\omega) \Delta x \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z(\omega)} = \frac{\Delta x}{z(\omega)}$$

Par conséquent, à la limite $\Delta x \rightarrow 0$ pour le quadripôle localisé au point x

$$U(\omega) \rightarrow U(x, \omega) \quad , \quad I(\omega) \rightarrow I(x, \omega)$$

$$\frac{\Delta U(\omega)}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial U(x, \omega)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta I(\omega)}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial I(x, \omega)}{\partial x}$$

La transcription des relations obtenues précédemment conduisent alors aux équations pour $U(x, \omega)$ et $I(x, \omega)$ que voici

$$U(x, \omega) = -z(\omega) \frac{\partial I(x, \omega)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U(x, \omega)}{\partial x} = -z'(\omega) I(x, \omega)$$

On parvient finalement sans difficulté aux équations différentielles suivantes pour les grandeurs $U(x, \omega)$ ou $I(x, \omega)$

$$\frac{\partial^2 U(x, \omega)}{\partial x^2} - \frac{z'(\omega)}{z(\omega)} U(x, \omega) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 I(x, \omega)}{\partial x^2} - \frac{z'(\omega)}{z(\omega)} I(x, \omega) = 0$$

qui jouent un rôle comparable à l'équation (4.128). La solution générale de la première de ces équations est de la forme

$$U(x, \omega) = A_+(\omega) \exp(+i k(\omega) x) + A_-(\omega) \exp(-i k(\omega) x)$$

$$\text{où} \quad k(\omega)^2 = -\frac{z'(\omega)}{z(\omega)}$$

La solution correspondante pour l'intensité du courant est donnée par l'expression

$$I(x, \omega) = -\frac{i k(\omega) A_+(\omega)}{z'(\omega)} \exp(+i k(\omega) x) + \frac{i k(\omega) A_-(\omega)}{z'(\omega)} \exp(-i k(\omega) x)$$

Pour choisir la détermination de la grandeur complexe $k(\omega)$ on adopte la convention qui veut que la partie réelle de cette grandeur complexe soit positive ou nulle lorsque $\omega > 0$.

$$k(\omega) = k_0(\omega) + i\kappa(\omega) \quad \text{où} \quad k_0(\omega) \geq 0$$

La vitesse de phase d'un signal de pulsation ω est alors donnée par l'expression

$$u(\omega) = \frac{\omega}{k_0(\omega)}$$

Quant à la grandeur,

$$Z_0(\omega) = \frac{i z'(\omega)}{k(\omega)} = \sqrt{z(\omega) z'(\omega)} \quad \text{où} \quad \text{Re} Z_0(\omega) \geq 0,$$

elle est appelée l'impédance (de Fourier) de la ligne de transmission.

Exercice 4.14

Partant des résultats acquis dans le cadre de l'exercice 4.13 étudier la transmission des signaux dans une ligne pour laquelle le quadripôle infinitésimal est du type représenté par la figure 4.9. Plus précisément, il s'agit de dégager l'équation différentielle qui régit la forme de la transformée de Fourier par rapport au temps $U(x, \omega)$ du potentiel $U(x, t)$ pour un signal de pulsation ω , ceci à la limite où les quadripôles peuvent être assimilés à un milieu continu, c'est-à-dire à la limite $|\Delta x| \rightarrow 0$.

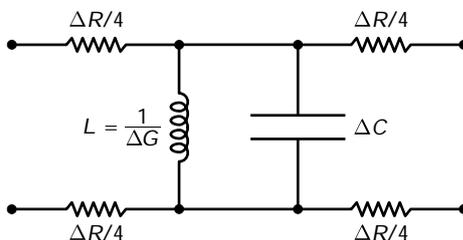


FIGURE 4.9 – Quadripôle formé d'un circuit résonant et de résistances représentatives d'un effet dissipatif.

Solution :

Dans cette situation, les impédances de Fourier $Z'(\omega)$ et $Z(\omega)$ qui caractérisent les éléments du quadripôle ont pour valeurs

$$Z'(\omega) = \Delta R \quad \text{et} \quad Z(\omega) = \frac{i \omega}{\omega^2 \Delta C - \Delta G}$$

et à la limite $|\Delta x| \rightarrow 0$

$$z'(\omega) = \frac{\Delta R}{\Delta x} \equiv \rho \quad \text{et} \quad z(\omega) = \frac{i \omega \Delta x}{\omega^2 \Delta C - \Delta G} \equiv \frac{i \omega}{\omega^2 \gamma - \lambda}$$

Le symbole γ correspond ici à la capacité par unité de longueur et le symbole λ à l'inverse de l'inductance par unité de longueur. Enfin le symbole ρ désigne la

résistance par unité de longueur. Les équations qui gouvernent la transmission d'un signal électrique de pulsation ω s'écrivent

$$\frac{\partial^2 U(x, \omega)}{\partial x^2} - \frac{z'(\omega)}{z(\omega)} U(x, \omega) \equiv \frac{\partial^2 U(x, \omega)}{\partial x^2} + k(\omega)^2 U(x, \omega) = 0$$

où

$$k(\omega)^2 = -\frac{z'(\omega)}{z(\omega)} = \frac{i \rho (\omega^2 \gamma - \lambda)}{\omega}$$

Décomposons la grandeur $k(\omega)$ en parties réelle et imaginaire. Posons

$$k(\omega) = k_0(\omega) + i \kappa(\omega) \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\lambda/\gamma}$$

Par conséquent

$$k_0(\omega)^2 - \kappa(\omega)^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2 k_0(\omega) \kappa(\omega) = \frac{\rho \sqrt{\gamma \lambda} (\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega \omega_0}$$

Dans ces conditions, ayant convenu que $k_0(\omega) \geq 0$, il vient

$$k_0(\omega) = \sqrt{\frac{\rho \sqrt{\gamma \lambda} |\omega^2 - \omega_0^2|}{2 \omega \omega_0}} \quad \text{et} \quad \kappa(\omega) = \frac{\rho \sqrt{\gamma \lambda} (\omega^2 - \omega_0^2)}{2 \omega \omega_0 k_0(\omega)}$$

La vitesse de phase des signaux de pulsation ω est donnée par l'expression

$$u(\omega) = \frac{\omega}{k_0(\omega)} = \sqrt{\frac{2 \omega^3 \omega_0}{\rho \sqrt{\gamma \lambda} |\omega^2 - \omega_0^2|}}$$

Quant à l'impédance (de Fourier) de la ligne de transmission elle prend la valeur

$$Z_0(\omega) = \sqrt{z(\omega) z'(\omega)} = \sqrt{\frac{\rho}{\sqrt{\gamma \lambda}} \frac{i \omega \omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}} \quad \text{où} \quad \text{Re } Z_0(\omega) \geq 0.$$

Cette dernière impédance de la ligne devient donc infinie lorsque la pulsation ω du signal atteint la valeur $\omega_0 = \sqrt{\lambda/\gamma}$. En outre

$$\text{Im } Z_0(\omega) < 0 \quad \text{lorsque} \quad \omega < \omega_0 \quad (\text{Comportement inductif})$$

et

$$\text{Im } Z_0(\omega) > 0 \quad \text{lorsque} \quad \omega > \omega_0 \quad (\text{Comportement capacitif})$$

Exercice 4.15.

Partant des résultats acquis dans le cadre de l'exercice 4.13 étudier la transmission des signaux dans une ligne pour laquelle le quadripôle infinitésimal est du type décrit par le schéma de la figure 4.10. Plus précisément, il s'agit de dégager l'équation différentielle qui régit la forme de la transformée de Fourier par rapport au temps $U(x, \omega)$ du potentiel $U(x, t)$ pour un signal de pulsation

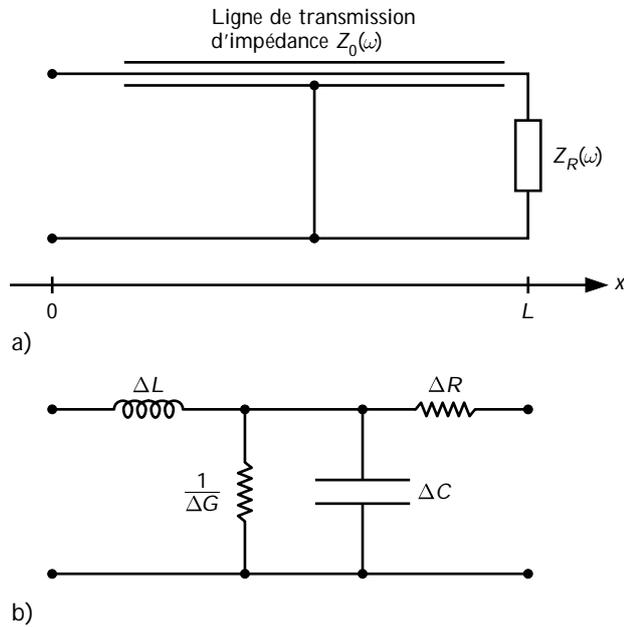


FIGURE 4.10 – La figure a) représente une ligne de transmission de longueur L fermée par une impédance $Z_R(\omega)$ située en $x = L$ la ligne étant connectée à un générateur de signaux de tension en $x = 0$. La figure b) représente le schéma du quadripôle infinitésimal de la ligne considérée dans ce problème.

ω et à la limite où les quadripôles peuvent être assimilés à un milieu continu, c'est-à-dire à la limite $|\Delta x| \rightarrow 0$.

Quelle est l'impédance de la ligne de transmission? Quel est le comportement de l'impédance d'entrée de la ligne en fonction de la longueur de la ligne pour une longueur d'onde donnée? Dégager la structure des signaux transmis?

Solution :

Les conventions adoptées pour les courants et les tensions sont les mêmes que celles de la figure 4.8. Présentement

$$U_1(\omega) - U_{12}(\omega) = -i \omega \Delta L I_1(\omega) \quad , \quad U_{12}(\omega) - U_2(\omega) = \Delta R I_2(\omega)$$

$$U_{12}(\omega) = \frac{I_{12}(\omega)}{\Delta G - i \omega \Delta C} \quad \text{et} \quad I_{12}(\omega) = I_1(\omega) - I_2(\omega)$$

Posons

$$Z(\omega) = \frac{1}{\Delta G - i \omega \Delta C}$$

Après élimination du courant $I_{12}(\omega)$ et de la tension $U_{12}(\omega)$ dans les relations précédentes on parvient aux expressions que voici

$$U_1(\omega) = (-i \omega \Delta L + Z(\omega)) \hat{I}_1(\omega) - Z(\omega) \hat{I}_2(\omega)$$

$$U_2(\omega) = Z(\omega) \hat{I}_1(\omega) - (\Delta R + Z(\omega)) \hat{I}_2(\omega)$$

La démarche qu'il faut ensuite adopter est similaire à celle qui fut adoptée à la sous-section (4.7.1). Comme en (4.119) et (4.120) posons

$$U(\omega) = \frac{U_1(\omega) + U_2(\omega)}{2} \quad , \quad I(\omega) = \frac{I_1(\omega) + I_2(\omega)}{2}$$

$$\Delta U(\omega) = U_2(\omega) - U_1(\omega) \quad \text{et} \quad \Delta I(\omega) = I_2(\omega) - I_1(\omega)$$

En termes de ces nouvelles grandeurs, les relations qui précèdent se transcrivent dans les suivantes

$$\begin{aligned} U(\omega) &= -\frac{Z'_+(\omega)}{2} I(\omega) - \left(\frac{Z'_-(\omega)}{4} + Z(\omega) \right) \Delta I(\omega) \\ \Delta U(\omega) &= -Z'_-(\omega) I(\omega) - \frac{Z'_+(\omega)}{2} \Delta I(\omega) \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$Z'_\pm(\omega) = \Delta R \pm i \omega \Delta L$$

Procédons maintenant au passage à la limite $|\Delta x| \rightarrow 0$. Pour le quadripôle centré au point x

$$\begin{aligned} U(\omega) &\rightarrow U(x, \omega) \quad , \quad I(\omega) \rightarrow I(x, \omega) \\ \frac{\Delta U(\omega)}{\Delta x} &\rightarrow \frac{\partial U(x, \omega)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta I(\omega)}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial I(x, \omega)}{\partial x} \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \frac{Z'_\pm(\omega)}{\Delta x} \equiv z'_\pm(\omega) = \rho \pm i \omega \lambda \quad \text{et} \quad \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \Delta x Z(\omega) \equiv z(\omega) = \frac{1}{\sigma - i \omega \gamma}$$

Les relations établies précédemment entre l'intensité du courant $I(\omega)$ et la tension $U(\omega)$ prennent au point x la forme locale

$$\begin{aligned} U(\omega, x) &= -z(\omega) \frac{\partial I(\omega, x)}{\partial x} \\ \frac{\partial U(\omega, x)}{\partial x} &= -z'_-(\omega) I(\omega, x) \end{aligned}$$

Par conséquent, après élimination de l'intensité du courant entre ces deux équations différentielles, on parvient pour la tension à l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 U(\omega, x)}{\partial x^2} - \frac{z'_-(\omega)}{z(\omega)} U(\omega, x) = 0 \quad \text{où} \quad \frac{z'_-(\omega)}{z(\omega)} = (\rho - i \omega \lambda) (\sigma - i \omega \gamma)$$

L'impédance (de Fourier) $Z_0(\omega)$ de la ligne de transmission a donc pour valeur

$$Z_0(\omega) = \sqrt{\frac{\rho - i \omega \lambda}{\sigma - i \omega \gamma}}$$

En outre, il apparaît que

$$\begin{aligned} k(\omega)^2 &= k_0(\omega)^2 - \kappa(\omega)^2 + 2 i k_0(\omega) \kappa(\omega) = -\frac{z'(\omega)}{z(\omega)} \\ &= \lambda \gamma \omega^2 - \rho \sigma + i \omega [\rho \gamma + \lambda \sigma] \end{aligned}$$

Donc

$$k_0(\omega)^2 - \kappa(\omega)^2 = \lambda \gamma \omega^2 - \rho \sigma \quad \text{et} \quad 2 k_0(\omega) \kappa(\omega) = \omega [\rho \gamma + \lambda \sigma]$$

Pour la suite il est commode de poser

$$u = \sqrt{\frac{1}{\lambda \gamma}} \quad , \quad \frac{1}{\tau_L} = \frac{\rho}{\lambda} \quad , \quad \frac{1}{\tau_C} = \frac{\sigma}{\gamma}$$

La grandeur $k_0(\omega)$ est solution de l'équation

$$k_0(\omega)^2 - \frac{1}{u^2} \left(\omega^2 - \frac{1}{\tau_L \tau_C} \right) - \frac{\omega^2}{4 u^4} \left(\frac{1}{\tau_C} + \frac{1}{\tau_L} \right)^2 = 0$$

et par conséquent

$$k_0(\omega)^2 = \frac{1}{2 u^2} \left[\omega^2 - \frac{1}{\tau_L \tau_C} + \sqrt{\left(\omega^2 + \frac{1}{\tau_C} \right) \left(\omega^2 + \frac{1}{\tau_L} \right)} \right]$$

d'où il découle immédiatement que

$$\kappa(\omega)^2 = \frac{1}{2 u^2} \left[-\omega^2 + \frac{1}{\tau_L \tau_C} + \sqrt{\left(\omega^2 + \frac{1}{\tau_C} \right) \left(\omega^2 + \frac{1}{\tau_L} \right)} \right]$$

Considérons maintenant une solution générale de l'équation qui gouverne l'évolution du signal. Puisque

$$\frac{\partial^2 U(x, \omega)}{\partial x^2} + k(\omega)^2 U(x, \omega) = 0$$

alors

$$U(x, \omega) = A_+(\omega) \exp(+i k(\omega) x) + A_-(\omega) \exp(-i k(\omega) x)$$

Quant à l'intensité correspondante du courant elle est donnée par l'expression

$$I(x, \omega) = \frac{A_+(\omega)}{Z_0(\omega)} \exp(+i k(\omega) x) - \frac{A_-(\omega)}{Z_0(\omega)} \exp(-i k(\omega) x)$$

vu la définition de l'impédance (de Fourier) de la ligne de transmission. Or

$$\begin{aligned} U(d, \omega) &= A_+(\omega) \exp(+i k(\omega) d) + A_-(\omega) \exp(-i k(\omega) d) \\ &= Z_R(\omega) \hat{I}(d, \omega) = Z_R(\omega) \left[\frac{A_+(\omega)}{Z_0(\omega)} \exp(+i k(\omega) d) - \frac{A_-(\omega)}{Z_0(\omega)} \exp(-i k(\omega) d) \right] \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{A_-(\omega)}{A_+(\omega)} = \exp(2 i k(\omega) d) \frac{Z_R(\omega) - Z_0(\omega)}{Z_R(\omega) + Z_0(\omega)}$$

et finalement, l'impédance (de Fourier) d'entrée de la ligne est donnée par la formule

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{U(0, \omega)}{I(0, \omega)} = Z_0(\omega) \frac{A_+(\omega) + A_-(\omega)}{A_+(\omega) - A_-(\omega)} \\ &= Z_0(\omega) \frac{Z_R(\omega) + Z_0(\omega) + (Z_R(\omega) - Z_0(\omega)) \exp(2 i k(\omega) d)}{Z_R(\omega) + Z_0(\omega) - (Z_R(\omega) - Z_0(\omega)) \exp(2 i k(\omega) d)} \\ &= Z_0(\omega) \frac{Z_R(\omega) - i Z_0(\omega) \tan(k(\omega) d)}{Z_0(\omega) - i Z_R(\omega) \tan(k(\omega) d)} \end{aligned}$$

Ce dernier résultat appelle le commentaire suivant. Puisque

$$\tan(k(\omega) d) = \frac{\tan(k_0(\omega) d) + i \tanh(\kappa(\omega) d)}{1 - i \tan(k_0(\omega) d) \tanh(\kappa(\omega) d)}$$

alors, dans la mesure où l'influence du coefficient d'atténuation $\kappa(\omega)$ peut être négligée, l'impédance (de Fourier) d'entrée de la ligne coïncide avec la grandeur $Z_R(\omega)$ lorsque la longueur d de la ligne correspond à un nombre entier de demi longueur d'onde. Autrement dit

$$Z(\omega) \cong Z_R(\omega) \quad \text{lorsque} \quad d = \frac{n \pi}{k_0(\omega)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Exercice 4.16

On considère une ligne de transmission formée de transformateurs couplés. Le quadripôle qui correspond à la maille de base de cette ligne de transmission est donné par le schéma de la figure 4.11.

Quelle est l'impédance d'une telle ligne lorsqu'elle est constituée de N quadripôles de base et qu'elle est fermée par un élément d'impédance $Z_N(\omega)$? Que se passe-t-il lorsque le nombre de quadripôles devient infini?

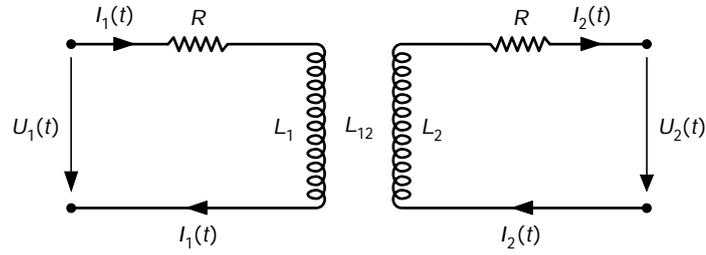


FIGURE 4.11 – Ligne de transmission réalisée par une suite de transformateurs couplés

Solution :

Les équations différentielles qui gouvernent l'évolution d'une maille de la ligne de transmission s'écrivent

$$\begin{aligned} U_1(t) &= +R I_1(t) + L_1 \frac{dI_1(t)}{dt} + L_{12} \frac{dI_2(t)}{dt} \\ U_2(t) &= -R I_2(t) - L_2 \frac{dI_2(t)}{dt} + L_{21} \frac{dI_1(t)}{dt} \end{aligned}$$

En transformées de Fourier par rapport au temps ces équations se transcrivent sous la forme

$$\begin{aligned} U_1(\omega) &= (R + i \omega L_1) I_1(\omega) + i \omega L_{12} I_2(\omega) \\ U_2(\omega) &= -(R + i \omega L_2) I_2(\omega) + i \omega L_{21} I_1(\omega) \end{aligned}$$

Posons

$$Z_1(\omega) = R + i \omega L_1 \quad \text{et} \quad Z_2(\omega) = R + i \omega L_2$$

La résolution du système d'équations linéaires qui précèdent par rapport aux grandeurs $I_2(\omega)$ et $U_2(\omega)$ conduit aux expressions

$$\begin{aligned} I_2(\omega) &= +\frac{1}{i \omega L_{12}} U_1(\omega) - \frac{Z_1(\omega)}{i \omega L_{12}} I_1(\omega) \\ U_2(\omega) &= -\frac{Z_2(\omega)}{i \omega L_{12}} U_1(\omega) + \frac{Z_1(\omega) Z_2(\omega) - \omega^2 L_{12} L_{21}}{i \omega L_{12}} I_1(\omega) \end{aligned}$$

qui transcrites en écriture matricielle s'écrivent

$$\begin{bmatrix} U_2(\omega) \\ I_2(\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{i \omega L_{12}} \begin{bmatrix} -Z_2(\omega) & Z_1(\omega) Z_2(\omega) - \omega^2 L_{12} L_{21} \\ +1 & -Z_1(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(\omega) \\ I_1(\omega) \end{bmatrix}.$$

Posons

$$z(\omega) = \frac{Z_1(\omega) + Z_2(\omega)}{2 \omega L_{12}} = \frac{R + i \omega L}{\omega L_{12}} \quad \text{où} \quad L = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

puis

$$\tau = \frac{L}{R}, \quad \Delta\tau = \frac{L_1 - L_2}{2R} \quad \text{et} \quad \tau_{12} = \frac{L_{12}}{R}$$

Les valeurs propres de la matrice qui figure dans l'expression matricielle qui précède jouent le rôle de facteurs de transmission. Elles sont les racines de l'équation du second degré

$$T(\omega)^2 - 2 i z(\omega) T(\omega) - 1 = 0$$

Ces valeurs propres s'écrivent

$$T_{\pm}(\omega) = \frac{i}{\omega \tau_{12}} \left(1 + i \omega \tau \pm \sqrt{1 - \omega^2(\tau^2 + \tau_{12}^2) + 2 i \omega \tau} \right)$$

et l'on notera que

$$T_-(\omega) = -\frac{1}{T_+(\omega)}$$

On dispose donc de deux modes de transmissions qui sont tels que

$$U_2(\omega) = T_{\pm}(\omega) U_1(\omega)$$

Remarque : $|T_{\pm}(\omega)| = 1$ si et seulement si $z(\omega) = \sin \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ autrement dit si et seulement si $L = 0$ et $R < \omega L_{12}$.

Par conséquent dès que le coefficient d'auto-induction moyen L est non nul le module de l'une des racines $T_{\pm}(\omega)$ est strictement supérieur à 1 et l'autre strictement inférieur à 1.

Examinons maintenant les modes propres, c'est-à-dire les modes pour lesquels

$$\frac{1}{i \omega L_{12}} \begin{bmatrix} -Z_2(\omega) & Z_1(\omega)Z_2(\omega) - \omega^2 L_{12}L_{21} \\ +1 & -Z_1(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\pm}(\omega) \\ I_{\pm}(\omega) \end{bmatrix} = T_{\pm}(\omega) \begin{bmatrix} U_{\pm}(\omega) \\ I_{\pm}(\omega) \end{bmatrix}$$

Pour ces modes propres

$$U_{\pm}(\omega) = Z_{\pm}(\omega) I_{\pm}(\omega) \quad \text{où} \quad Z_{\pm}(\omega) = R \left(i \omega \Delta\tau \pm \sqrt{1 - \omega^2(\tau^2 + \tau_{12}^2) + 2 i \omega \tau} \right)$$

Mais, pour le signal d'entrée

$$\begin{bmatrix} U_0(\omega) \\ I_0(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_+(\omega) \\ 1 \end{bmatrix} I_+(\omega) + \begin{bmatrix} Z_-(\omega) \\ 1 \end{bmatrix} I_-(\omega)$$

Par conséquent

$$I_+(\omega) = \frac{U_0(\omega) - Z_-(\omega) I_0(\omega)}{Z_+(\omega) - Z_-(\omega)} \quad \text{et} \quad I_-(\omega) = \frac{U_0(\omega) - Z_+(\omega) I_0(\omega)}{Z_-(\omega) - Z_+(\omega)}$$

puis

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_N(\omega) \\ I_N(\omega) \end{bmatrix} &= \left(T_+(\omega)^N \begin{bmatrix} Z_+(\omega) \\ 1 \end{bmatrix} I_+(\omega) + T_-(\omega)^N \begin{bmatrix} Z_-(\omega) \\ 1 \end{bmatrix} I_-(\omega) \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} Z_+(\omega) \\ 1 \end{bmatrix} T_+(\omega)^N \frac{U_0(\omega) - Z_-(\omega) I_0(\omega)}{Z_+(\omega) - Z_-(\omega)} + \begin{bmatrix} Z_-(\omega) \\ 1 \end{bmatrix} T_-(\omega)^N \frac{U_0(\omega) - Z_+(\omega) I_0(\omega)}{Z_-(\omega) - Z_+(\omega)} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$U_N(\omega) = \frac{Z_+(\omega) T_+(\omega)^N - Z_-(\omega) T_-(\omega)^N}{Z_+(\omega) - Z_-(\omega)} U_0(\omega) - \frac{Z_+(\omega) Z_-(\omega) (T_+(\omega)^N - T_-(\omega)^N)}{Z_+(\omega) - Z_-(\omega)} I_0(\omega)$$

et

$$I_N(\omega) = \frac{T_+(\omega)^N - T_-(\omega)^N}{Z_+(\omega) - Z_-(\omega)} U_0(\omega) - \frac{Z_-(\omega) T_+(\omega)^N - Z_+(\omega) T_-(\omega)^N}{Z_+(\omega) - Z_-(\omega)} I_0(\omega)$$

Or

$$U_N(\omega) = Z_N(\omega) I_N(\omega)$$

et par conséquent

$$\frac{U_0(\omega)}{I_0(\omega)} = Z(\omega) = \frac{Z_-(\omega) (Z_+(\omega) - Z_N(\omega)) T_+(\omega)^N - Z_+(\omega) (Z_-(\omega) - Z_N(\omega)) T_-(\omega)^N}{(Z_+(\omega) - Z_N(\omega)) T_+(\omega)^N - (Z_-(\omega) - Z_N(\omega)) T_-(\omega)^N}$$

Supposons que le choix fait soit $|T_+(\omega)| < 1$ alors lorsque $N \rightarrow \infty$ on a $Z(\omega) \rightarrow Z_+(\omega)$. En outre, si $Z_N(\omega) = Z_+(\omega)$ alors $Z(\omega) = Z_+(\omega)$ et si $Z_N(\omega) = Z_-(\omega)$ alors $Z(\omega) = Z_-(\omega)$.

Enfin remarquons que lorsque $R = 0$ alors

$$T_{\pm}(\omega) = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 + L_{12}^2}}{L_{12}} \in \mathbb{R}$$

et

$$Z_{\pm}(\omega) = i \omega (\Delta L \pm \sqrt{L^2 - L_{12}^2})$$

Exercice 4.17★

Considérons un *circuit redresseur à une alternance*. Le circuit redresseur envisagé est décrit par la figure 4.12 b) qui en fournit un schéma de principe très simplifié. Il s'agit d'un dispositif qui, alimenté en courant alternatif, fournit à la

sortie un courant continu. Ce dispositif contient un élément appelé *diode*. Une diode est un élément de circuit qui a la propriété de présenter un coefficient de résistance infini lorsque la tension appliquée aux bornes de cet élément est négative (par choix conventionnel) et une résistance finie faible lorsque la tension appliquée aux bornes de cet élément est positive. La figure 4.12 a) représente la dépendance du courant I en fonction de la tension U appliquée aux borne de la diode. Le but de l'exercice est la détermination de la tension du courant "redressé" en fonction du temps lorsque le dispositif fonctionne en régime permanent. En effet un tel dispositif très simple, ne fournit pas une tension de sortie parfaitement indépendante du temps. La tension de sortie du dispositif présente de "petites fluctuations" que l'on demande d'estimer. Dans ce circuit la valeur du coefficient de résistance R est fixée par les besoins de l'utilisateur. Quant à la capacité C du condensateur elle est choisie de telle manière que le temps de relaxation $\tau_0 = R C$ soit beaucoup plus grand que la période $2\pi/\omega$ du courant alternatif. Enfin, la résistance interne de la diode R_D est suffisamment faible pour que le condensateur puisse être chargé efficacement durant l'intervalle de temps où la diode est conductrice. Il faut que le temps de relaxation $\tau = R_D C$ associé à la charge du condensateur soit plus petit que la période $2\pi/\omega$ du courant alternatif. Compte tenu des hypothèses faites on se livrera à une étude approchée du comportement de la tension de sortie de ce dispositif.

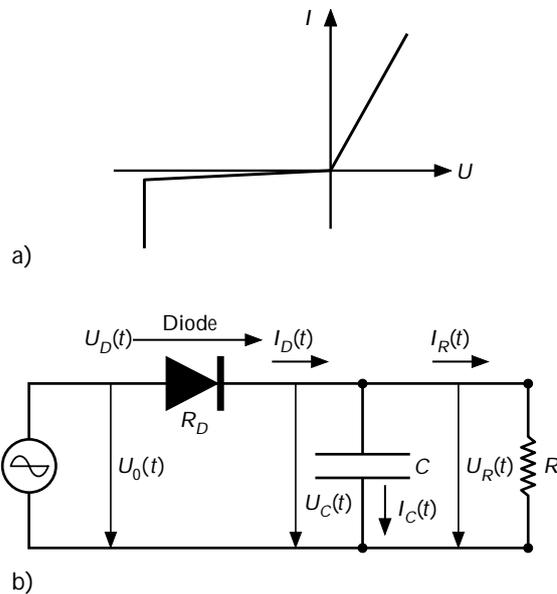


FIGURE 4.12 – La figure a) montre la dépendance du courant qui parcourt la diode en fonction de la tension appliquée aux bornes de celle-ci. Dans ce graphe simplifié l'inverse de la pente de la droite qui fournit l'intensité du courant en fonction de la tension, lorsque cette dernière tension est positive, est la résistance de la diode en mode de fonctionnement conducteur. Lorsque cette tension est négative cette résistance est très grande, pratiquement infinie, jusqu'à une tension au-delà de laquelle on assiste à l'établissement d'un court-circuit. La figure b) donne le schéma de principe très simplifié d'un circuit redresseur à une alternance.

Solution :

Adoptons comme tension d'entrée du circuit redresseur la tension alternative

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad U_0 > 0$$

Selon les lois de Kirchhoff, on a les relations

$$\begin{aligned} U(t) &= U_D(t) + U_R(t) \quad , \quad U_R(t) = U_C(t) \quad , \quad I_D(t) = I_C(t) + I_R(t) \\ U_D(t) &= R_D I_D(t) \quad , \quad I_C(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt} \quad \text{et} \quad U_R(t) = R I_R(t) \end{aligned}$$

Après élimination des grandeurs $I_D(t)$, $I_C(t)$ et $I_R(t)$ puis $U_D(t)$ et $U_C(t)$ on parvient à l'équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

$$A \sin(\omega t) = U_R(t) + \tau \frac{dU_R(t)}{dt}$$

dans laquelle on a posé

$$\tau = \frac{R R_D}{R + R_D} C = \quad \text{et} \quad A = \frac{R U_0}{R + R_D}$$

L'intégration de l'équation différentielle ci-dessus conduit à la solution générale

$$U_R(t) = A \frac{\sin(\omega t) - \omega \tau \cos(\omega t)}{\omega^2 \tau^2 + 1} + B_1 \exp(-t/\tau)$$

dans laquelle le symbole B_1 désigne une constante d'intégration. Cette solution concerne la situation pour laquelle la diode est conductrice, donc la situation pour laquelle $U_R(t) \leq U_0(t)$. Lorsque la diode n'est pas conductrice, donc lorsque $U_R(t) > U_0(t)$, alors

$$U_R(t) = B_2 \exp(-t/\tau_0)$$

puisque dans ce cas $A = 0$. Dans cette expression B_2 désigne une constante d'intégration et l'on a posé

$$\tau_0 = RC \geq \tau$$

En régime permanent la diode n'est pas conductrice entre les instants consécutifs $t_0 + 2\pi n/\omega$ et $t_1 + 2\pi n/\omega$ pour tout n entier. Elle est conductrice entre les instants consécutifs $t_1 + 2\pi n/\omega$ et $t_0 + 2\pi(n+1)/\omega$. Ainsi, à l'instant t_0 et à l'instant t_1 ,

$$\begin{aligned} U_0 \sin(\omega t_0) &= B_2 \exp(-t_0/\tau_0) \\ U_0 \sin(\omega t_1) &= B_2 \exp(-t_1/\tau_0) \\ U_0 \sin(\omega t_1) &= A \frac{\sin(\omega t_1) - \omega \tau \cos(\omega t_1)}{\omega^2 \tau^2 + 1} + B_1 \exp(-t_1/\tau) \end{aligned}$$

Enfin, à l'instant $t_2 = t_0 + 2\pi/\omega$ consécutif de l'instant t_1 , il faut que

$$U_0 \sin(\omega t_2) = A \frac{\sin(\omega t_2) - \omega\tau \cos(\omega t_2)}{\omega^2\tau^2 + 1} + B_1 \exp(-t_2/\tau)$$

Il convient de poser

$$B'_1 = B_1 \exp(-t_1/\tau) \quad \text{et} \quad B'_2 = B_2 \exp(-t_0/\tau_0)$$

En résumé, les relations à satisfaire s'écrivent

$$\begin{aligned} U_0 \sin(\omega t_0) &= B'_2 \\ U_0 \sin(\omega t_1) &= B'_2 \exp\left(-\frac{\omega(t_1 - t_0)}{\omega\tau_0}\right) \\ U_0 \sin(\omega t_1) &= A \frac{\sin(\omega t_1) - \omega\tau \cos(\omega t_1)}{\omega^2\tau^2 + 1} + B'_1 \\ U_0 \sin(\omega t_0) &= A \frac{\sin(\omega t_0) - \omega\tau \cos(\omega t_0)}{\omega^2\tau^2 + 1} + B'_1 \exp\left(-\frac{\omega(t_0 - t_1) + 2\pi}{\omega\tau}\right) \end{aligned}$$

Prenons maintenant en compte le fait que

$$\tau_0 \gg \frac{2\pi}{\omega} \gg \tau$$

Commençons par considérer la situation limite où $\tau_0 \rightarrow \infty$ et $\tau \rightarrow 0$. Il suit alors des deux premières des équations ci-dessus que $\omega t_1 = 3\pi - \omega t_0$ puisque dans ces conditions $\sin(\omega t_0) = \sin(\omega t_1)$. Par conséquent $\cos(\omega t_0) = -\cos(\omega t_1)$ et il découle des deux dernières équations ci-dessus que $\omega t_0 = \pi/2$ et que $\omega t_1 = 5\pi/2$.

Revenons maintenant à la situation où le temps de relaxation τ n'est pas nul et le temps de relaxation τ_0 n'est pas infini. Posons

$$\omega t_1 = 3\pi - \omega t_0 - \omega \Delta t_1$$

Compte des observations qui viennent d'être faites, la grandeur Δt_1 est nulle dans la situation limite qui vient d'être considérée. Dans la situation où le temps de relaxation τ n'est pas nul et le temps de relaxation τ_0 n'est pas infini on se propose de déterminer la valeur de Δt_1 de manière approchée.

Dans ce but considérons les deux premières des quatre équations données plus haut. En éliminant B'_2 entre ces deux équations puis compte tenu des relations

$$t_1 - t_0 = \frac{3\pi}{\omega} - 2t_0 - \Delta t_1$$

et

$$\begin{aligned} \sin(\omega t_1) &= \sin(3\pi - \omega t_0 - \omega \Delta t_1) \\ &= \sin(\omega t_0) \cos(\omega \Delta t_1) + \cos(\omega t_0) \sin(\omega \Delta t_1) \end{aligned}$$

on parvient, après simplification, à l'équation suivante

$$\cos(\omega \Delta t_1) + \cot(\omega t_0) \sin(\omega \Delta t_1) = \exp\left(-\frac{\omega(3\pi - 2\omega t_0 - \omega \Delta t_1)}{\omega \tau_0}\right)$$

Si, dans cette dernière équation, on ne retient que les contributions du premier ordre en Δt_1 on obtient la relation approchée

$$1 + \cot(\omega t_0) \omega \Delta t_1 = \exp\left(-\frac{3\pi - 2\omega t_0}{\omega \tau_0}\right) \left(1 + \frac{\omega \Delta t_1}{\omega \tau_0}\right)$$

de laquelle résulte l'expression que voici pour la grandeur $\omega \Delta t_1$

$$\omega \Delta t_1 = \omega \tau_0 \frac{1 - \exp[-(3\pi - 2\omega t_0)/(\omega \tau_0)]}{\exp[-(3\pi - 2\omega t_0)/(\omega \tau_0)] - \omega \tau_0 \cot(\omega t_0)}$$

Or, selon les hypothèses faites, $\omega t_0 \gg 3\pi - 2\omega t_0$ car d'une manière qui n'est limitative on peut convenir que $\pi/2 < \omega t_0 < \pi$. Dans ces conditions, en première approximation

$$\omega \Delta t_1 \approx \frac{3\pi - 2\omega t_0}{1 - \omega \tau_0 \cot(\omega t_0)}$$

Considérons maintenant les deux dernières équations à satisfaire. Dans ces équations, en première approximation on peut substituer à ωt_1 la phase $\omega t_1 \approx 3\pi - \omega t_0$. Ces équations présentent alors la forme que voici

$$\begin{aligned} U_0 \sin(\omega t_0) &= A \frac{\sin(\omega t_0) + \omega \tau \cos(\omega t_0)}{\omega^2 \tau^2 + 1} + B'_1 \\ U_0 \sin(\omega t_0) &= A \frac{\sin(\omega t_0) - \omega \tau \cos(\omega t_0)}{\omega^2 \tau^2 + 1} + B'_1 \exp\left(\frac{\pi - 2\omega t_0}{\omega \tau}\right) \end{aligned}$$

puisque $\sin(\omega t_1) \approx \sin(\omega t_0)$ et $\cos(\omega t_1) \approx -\cos(\omega t_0)$. Considérons ensuite la somme et la différence membre à membre de ces deux dernières équations. Il vient

$$\begin{aligned} 2 U_0 \sin(\omega t_0) &= 2 A \frac{\sin(\omega t_0)}{\omega^2 \tau^2 + 1} + B'_1 \left(1 + \exp\left(\frac{\pi - 2\omega t_0}{\omega \tau}\right)\right) \\ 0 &= 2 A \frac{\omega \tau \cos(\omega t_0)}{\omega^2 \tau^2 + 1} + B'_1 \left(1 - \exp\left(\frac{\pi - 2\omega t_0}{\omega \tau}\right)\right) \end{aligned}$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{U_0 (\omega^2 \tau^2 + 1) - A}{\omega^2 \tau^2 + 1}\right) \sin(\omega t_0) &= B'_1 \left(\exp\left(\frac{\pi - 2\omega t_0}{\omega \tau}\right) + 1\right) \\ 2 \left(\frac{A \omega \tau}{\omega^2 \tau^2 + 1}\right) \cos(\omega t_0) &= B'_1 \left(\exp\left(\frac{\pi - 2\omega t_0}{\omega \tau}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

Du rapport membre à membre de ces équations découle alors la relation que voici

$$\frac{A \omega \tau}{U_0 (\omega^2 \tau^2 + 1) - A} \cot(\omega t_0) = \tanh\left(\frac{\pi/2 - \omega t_0}{\omega \tau}\right)$$

ou encore la relation

$$\frac{A \omega \tau}{U_0 (\omega^2 \tau^2 + 1) - A} \tan(\pi/2 - \omega t_0) = \tanh\left(\frac{\pi/2 - \omega t_0}{\omega \tau}\right)$$

Cette équation possède toujours une solution non-triviale telle que $0 < \pi/2 - \omega t_0 < \pi/2$ puisque

$$\frac{A \omega \tau}{U_0 (\omega^2 \tau^2 + 1) - A} < \frac{1}{\omega \tau}$$

car $U_0/A \geq 1$. Une représentation graphique des deux membres de l'équation obtenue en fonction de la variable $\pi/2 - \omega t_0$ dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ à savoir les graphes des fonctions

$$y = \frac{A \omega \tau}{U_0 (\omega^2 \tau^2 + 1) - A} \tan(\pi/2 - \omega t_0) \quad \text{et} \quad y = \tanh\left(\frac{\pi/2 - \omega t_0}{\omega \tau}\right)$$

montre clairement ce qu'est le comportement de la solution du problème en fonction des caractéristiques des éléments qui constituent le circuit redresseur puisque la solution est l'abscisse du point d'intersection de ces graphes. Ayant ainsi cerné la situation on peut alors se livrer à diverses approches formelles de cette solution.

Exercice 4.18.

Le *transistor* est aujourd'hui le composant électronique actif de base en électronique. Il est principalement utilisé comme *résistance variable*. Le terme **transistor** provient du terme anglais *transfer resistor*. Le transistor a été inventé le 23 décembre 1947 par les américains *John Bardeen*, *William Shockley* et *Walter Brattain*, tous trois chercheurs de la compagnie Bell Telephone. Pour cette découverte ils ont reçu le Prix Nobel de physique en 1956.

Un transistor est un élément de circuit semi-conducteur à trois électrodes qui permet de contrôler le passage du courant entre deux électrodes par l'émetteur, le collecteur (transistor bipolaire), la source et le drain (transistor à effet de champ) entre la base (transistor bipolaire) et la grille (transistor à effet de champ).

Un transistor bipolaire est composé de deux substrats semiconducteurs dopés de manières identiques (P ou N) séparés par une mince tranche de semiconducteur dopé de manière inverse. On dispose ainsi de deux types de transistors notés NPN ou PNP. Le transistor à effet de champ se compose d'un barreau semiconducteur dopé N ou P, entouré au centre d'un anneau semiconducteur

dopé de manière inverse P ou N respectivement.

Dans un schéma, pour le transistor bipolaire, la flèche identifie l'émetteur. Elle est tournée vers l'extérieur dans le cas NPN et vers l'intérieur dans le cas PNP. L'électrode intermédiaire figure la base et la dernière électrode figure le collecteur. Dans le cas du transistor à effet de champ la représentation est symétrique car les rôles du drain et de la source sont interchangeables. La figure 4.13 a) donne les éléments de circuits attachés à la description des transistors dans les schémas de réseaux électriques. Cette figure fournit en outre sous 4.13 b) un exemple de schéma équivalent pour un transistor.

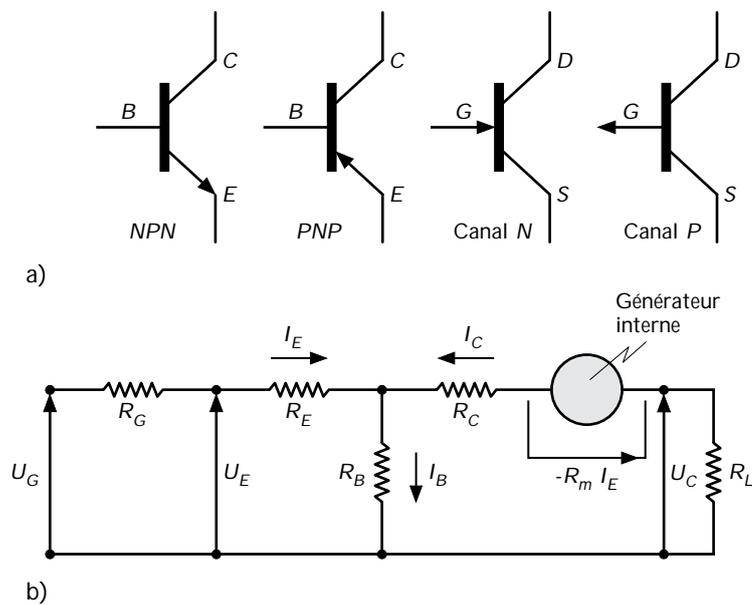


FIGURE 4.13 – La figure a) donne les symboles représentatifs des transistors utilisés dans les schémas de circuits électriques. La figure b) donne un exemple de schéma équivalent. Il s'agit d'un circuit quadripolaire dans lequel la tension U_G tient lieu de tension de grille, la tension U_E tient lieu de tension d'émetteur et la tension U_C tient lieu de tension de collecteur. La résistance R_L représente un utilisateur. Dans ce schéma équivalent la tension $-R_m I_E$ est la tension aux bornes d'un générateur interne agissant comme une *résistance négative*.

Le transistor bipolaire est un amplificateur de courant. On injecte un courant dans l'espace base/émetteur afin de créer un courant multiplié par le gain du transistor entre l'émetteur et le collecteur. Pour le transistor à effet de champ l'organe de commande est la grille. Celle-ci nécessite l'application d'une tension entre la grille et la source pour contrôler le courant entre la source et le drain. Le courant de grille est quasiment nul et négligeable. La grille se comporte comme un condensateur de faible capacité.

On demande d'établir la relation entre le courant du drain (collecteur) I_C et la tension de la grille (base) U_G ainsi que la forme matricielle de la relation entre la tension de la base (émetteur) U_E et la tension du drain (collecteur) U_C et les courants I_E et I_C qui leur sont associés. Quelle est l'impédance de la base

(émetteur) lorsque le drain (collecteur) est branché sur la résistance de valeur R_L ?

Solution :

Commençons par appliquer les lois de Kirchhoff. En vertu de celles-ci on dispose des relations que voici. Selon la première loi de Kirchhoff,

$$I_E + I_C = I_B \quad (1)$$

et selon la seconde loi de Kirchhoff,

$$\begin{aligned} U_G + (R_G + R_E) I_E + R_B I_B &= 0 \\ \text{et} & \\ U_C - U_m + R_C I_C + R_B I_B &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

En outre on dispose des relations

$$U_E = U_G + R_G I_E \quad , \quad U_C = R_L I_C \quad \text{et} \quad U_m = -R_m I_E \quad (3)$$

Dans les équations (2) éliminons les grandeurs I_B , U_C et U_m à l'aide des relations (1) et (3). On obtient ainsi les relations

$$\begin{aligned} U_G + (R_G + R_E + R_B) I_E + R_B I_C &= 0 \\ \text{et} & \\ R_L I_C + (R_m + R_B) I_E + (R_C + R_B) I_C &= 0 \end{aligned}$$

De ces deux dernières relations découle finalement la relation suivante entre la tension de grille et le courant de drain après élimination du courant I_E

$$I_C = \frac{R_m + R_B}{((R_G + R_E)(R_C + R_B) + R_B R_C) + (R_G + R_E + R_B) R_L - R_m R_B} U_G$$

Il suit des relations (1) et (2) puis de la deuxième et la troisième des relations (3) que

$$\begin{aligned} U_E &= -(R_E I_E - R_B I_B) \\ \text{et} & \\ U_C &= -(R_m + R_B) I_E - (R_C I_C - R_B I_B) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{bmatrix} U_E \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{EE} & R_{EC} \\ R_{CE} & R_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_E \\ I_C \end{bmatrix}.$$

où

$$\begin{aligned} R_{EE} &= -(R_E + R_B) & , & & R_{EC} &= -R_B \\ R_{CE} &= -(R_m + R_B) & , & & R_{CC} &= -(R_C + R_B) \end{aligned}$$

Puisque $U_C = R_L I_C$ des relations qui précèdent on tire

$$\begin{aligned} I_C &= -\frac{R_{CE}}{R_{CC} - R_L} I_E \\ U_E &= \left[R_{EE} - \frac{R_{EC} R_{CE}}{R_{CC} - R_L} \right] I_E = Z_E I_E \end{aligned}$$

Finalement

$$Z_E = \frac{R_{EE} (R_{CC} - R_L) - R_{EC} R_{CE}}{R_{CC} - R_L}$$

Exercice 4.19

Etudier le fonctionnement d'une cage d'écoreuil en présence d'un champ d'induction d'intensité constante tournant avec une vitesse angulaire de rotation de valeur ω_0 . La cage d'écoreuil possède une vitesse de rotation angulaire de ω . Elle présente une résistance électrique R et un coefficient d'auto induction L . Quel est le moment des forces subies par la cage d'écoreuil en fonction de la vitesse de rotation ω ? On supposera que la cage d'écoreuil est rectangulaire de longueur a selon l'axe de rotation et de longueur radiale $2b$. La figure 4.14 décrit le dispositif envisagé.

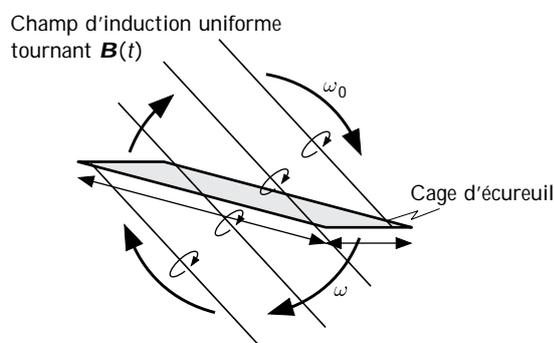


FIGURE 4.14 – Cage d'écoreuil en présence d'un champ d'induction tournant. La différence de la vitesse de rotation du champ d'induction tournant et de la vitesse de rotation de la cage d'écoreuil induit une tension et par voie de conséquence un courant dans celle-ci. De la circulation de ce courant naît un moment de force qui s'exerce sur l'axe de rotation qui supporte cette cage d'écoreuil.

Solution :

Notons $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ la différence de pulsation de la cage d'écoreuil et du champ d'induction tournant. Le flux $F(t)$ du champ d'induction au travers de la boucle qui constitue la cage d'écoreuil s'écrit

$$F(t) = F_0 \cos(\Delta\omega t) \quad \text{où} \quad F_0 = 2 a b \check{B}_0$$

L'intensité du courant induit dans la cage d'écurueil est donnée par la loi d'induction de Faraday qui s'écrit

$$L \frac{dI(t)}{dt} + R I(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\Delta\omega F_0 \sin(\Delta\omega t)$$

Or en régime permanent la dépendance de l'intensité du courant par rapport au temps est de la forme de la forme

$$I(t) = I_0 \sin(\Delta\omega t - \delta)$$

Par conséquent

$$I_0 \left(L \Delta\omega \cos(\Delta\omega t - \delta) + R \sin(\Delta\omega t - \delta) \right) = -\Delta\omega F_0 \sin(\Delta\omega t)$$

De cette dernière relation, qui doit être satisfaite pour tout temps, découle les égalité suivantes

$$\tan \delta = \frac{\Delta\omega L}{R} \quad , \quad \cos \delta = \frac{R}{\sqrt{\Delta\omega^2 L^2 + R^2}} \quad \text{et} \quad I_0 = \frac{-\Delta\omega F_0}{\sqrt{\Delta\omega^2 L^2 + R^2}}$$

On constate alors aisément que le couple que les forces de Laplace exercent sur l'axe de rotation de la cage d'écurueil est fourni par l'expression que voici

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z &= 2 a b I_0 \check{B}_0 \sin(\Delta\omega t - \delta) \sin(\Delta\omega t) \\ &= F_0 I_0 \left(\sin(\Delta\omega t)^2 \cos \delta - \cos(\Delta\omega t) \sin(\Delta\omega t) \sin \delta \right) \end{aligned}$$

Par conséquent le couple moyen exercé durant une période $T = 2\pi/|\Delta\omega|$ a pour valeur

$$\overline{\mathcal{M}}_z = F_0 I_0 \frac{1}{2} \cos \delta = \frac{-\Delta\omega F_0^2}{2} \frac{R}{\Delta\omega^2 L^2 + R^2}$$

En guise de conclusion :

Lorsque $\omega < \omega_0$, c'est-à-dire lorsque $\Delta\omega < 0$, le couple $\overline{\mathcal{M}}_z$ est positif et il a tendance à accélérer la vitesse de rotation de la cage d'écurueil. Le système fonctionne donc comme un moteur.

Lorsque $\omega > \omega_0$, c'est-à-dire lorsque $\Delta\omega > 0$, le couple $\overline{\mathcal{M}}_z$ est négatif et il a tendance à diminuer la vitesse de rotation de la cage d'écurueil. Le système fonctionne donc en génératrice.

Exercice 4.20

On considère 3 bobines identiques disposées à distances égales d'un axe et dont les axes coplanaires forment des angles égaux à $2\pi/3$. La figure 4.15 décrit la

disposition envisagée. Les enroulements sont semblables et ces bobines sont alimentées en tensions alternatives triphasées de pulsation ω . Montrer que ces trois bobines produisent au point central un champ d'induction tournant avec une vitesse angulaire égale à la pulsation du courant alternatif triphasé.

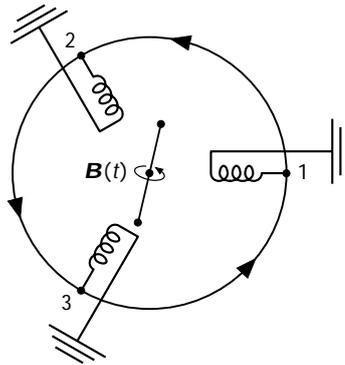


FIGURE 4.15 – Trois bobines identiques dont les axes sont coplanaires font des angles de 120° entre-eux. Ces bobines sont alimentées en tensions alternatives triphasées.

Solution :

Supposons que l'intensité du courant qui circule dans les enroulements alimentés par les contacts 1, 2 et 3 s'écrit

$$I_1(t) = I \cos(\omega t) \quad , \quad I_2(t) = I \cos(\omega t - 2\pi/3)$$

et $I_3(t) = I \cos(\omega t - 4\pi/3)$

Ces enroulements créent chacun un champ d'induction au point central qui est respectivement de la forme

$$\check{B}(t) = \check{B} \mathbf{u}_1 \cos(\omega t) \quad , \quad \check{B}(t) = \check{B} \mathbf{u}_2 \cos(\omega t - 2\pi/3)$$

et $\check{B}(t) = \check{B} \mathbf{u}_3 \cos(\omega t - 4\pi/3)$

Dans ces expressions

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 \quad , \quad \mathbf{u}_2 = \cos(2\pi/3) \mathbf{e}_1 + \sin(2\pi/3) \mathbf{e}_2$$

et $\mathbf{u}_3 = \cos(4\pi/3) \mathbf{e}_1 + \sin(4\pi/3) \mathbf{e}_2$

Le champ d'induction résultant dû aux trois enroulements est donc de la forme

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{B}}(t) &= \check{B} \left[\mathbf{u}_1 \cos(\omega t) + \mathbf{u}_2 \cos(\omega t - 2\pi/3) + \mathbf{u}_3 \cos(\omega t - 4\pi/3) \right] \\
&= \check{B} \left[\left(\cos(\omega t) + \cos(2\pi/3) \cos(\omega t - 2\pi/3) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \cos(4\pi/3) \cos(\omega t - 4\pi/3) \right) \mathbf{e}_1 \right. \\
&\quad \left. + \left(\sin(2\pi/3) \cos(\omega t - 2\pi/3) + \sin(4\pi/3) \cos(\omega t - 4\pi/3) \right) \mathbf{e}_2 \right]
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
&\cos(\omega t) + \cos(2\pi/3) \cos(\omega t - 2\pi/3) \\
&+ \cos(4\pi/3) \cos(\omega t - 4\pi/3) = \frac{3}{2} \cos(\omega t) \\
\text{et} \\
&\sin(2\pi/3) \cos(\omega t - 2\pi/3) \\
&+ \sin(4\pi/3) \cos(\omega t - 4\pi/3) = \frac{3}{2} \sin(\omega t)
\end{aligned}$$

Finalement

$$\check{\mathbf{B}}(t) = \frac{3\check{B}}{2} \left(\cos(\omega t) \mathbf{e}_1 + \sin(\omega t) \mathbf{e}_2 \right)$$

Chapitre 5

Solutions des exercices du chapitre 5

Exercice 5.1

Montrer que pour toute solution $\check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$ de l'équation de champ (5.33) telle que

$$\operatorname{div} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$$

il existe un champ de déplacement électrique $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ qui, avec le champ magnétique $\check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$, satisfait aux équations de Maxwell-Hertz.

Solution :

Puisque

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) \equiv 0 ,$$

alors il existe un champ de vecteurs $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$, défini au gradient d'une fonction $f(\mathbf{x}, t)$ près, tel que

$$\operatorname{rot} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

Soit $\mathbf{D}_0(\mathbf{x}, t)$ une solution particulière de cette dernière équation et soit

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D}_0(\mathbf{x}, t) + \operatorname{grad} f(\mathbf{x}, t)$$

la solution générale. La fonction $f(\mathbf{x}, t)$ peut alors être choisie de telle manière que

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div} \mathbf{D}_0(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \operatorname{grad} f(\mathbf{x}, t) = q(\mathbf{x}, t)$$

La fonction $f(\mathbf{x}, t)$ est ainsi définie à une fonction harmonique $f_0(\mathbf{x}, t)$ près et le champ $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ au gradient de cette fonction $f_0(\mathbf{x}, t)$ près. L'équation (5.33) peut donc être transcrite sous la forme

$$\begin{aligned}
\check{\text{rot}} \check{\text{rot}} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) &= \check{\text{rot}} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \\
&= \check{\text{rot}} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \check{\text{rot}} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \\
&= \check{\text{rot}} \left(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, au gradient d'une fonction arbitraire $g(\mathbf{x}, t)$ près,

$$\check{\text{rot}} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{grad} g(\mathbf{x}, t)$$

Or de cette dernière équation il découle que

$$\begin{aligned}
\text{div} \check{\text{rot}} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) &= \text{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \text{div} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{div} \mathbf{grad} g(\mathbf{x}, t) \\
&= \text{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \text{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \Delta g(\mathbf{x}, t) \\
&= \text{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial q(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \Delta g(\mathbf{x}, t) = \Delta g(\mathbf{x}, t) = 0
\end{aligned}$$

La fonction harmonique $f_0(\mathbf{x}, t)$ peut donc être choisie de telle manière que la fonction harmonique $g(\mathbf{x}, t)$ est identiquement nulle à chaque instant.

Exercice 5.2

Problème similaire à celui qui précède. Montrer que pour toute solution $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ de l'équation de champ (5.32) telle que

$$\text{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = q(\mathbf{x}, t)$$

il existe un champ magnétique $\check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$ qui, avec le champ de déplacement électrique $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$, satisfait aux équations de Maxwell-Hertz.

Solution :

Compte tenu de la condition $\text{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = q(\mathbf{x}, t)$ il découle de l'équation (5.32) que

$$-\check{\text{rot}} \check{\text{rot}} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

Autrement dit

$$-\check{\text{rot}} \check{\text{rot}} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)$$

Il existe donc un champ de vecteurs axiaux $\check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$, défini à un champ de vecteurs $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ indépendant du temps à divergence nulle près, tel que

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \check{\check{\mathbf{H}}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\check{\check{\mathbf{rot}}} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \quad \text{et} \quad \text{div} \check{\check{\mathbf{H}}}(\mathbf{x}, t) = 0$$

Dans ces conditions l'équation (5.32) peut être transcrite sous la forme,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \check{\check{\mathbf{rot}}} \check{\check{\mathbf{H}}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \check{\check{\mathbf{rot}}} \left(\frac{\partial \check{\check{\mathbf{H}}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)$$

Par conséquent

$$\check{\check{\mathbf{rot}}} \check{\check{\mathbf{H}}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

où le symbole $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ désigne un champ de vecteurs indépendant du temps dont la divergence est identiquement nulle. Le champ de vecteurs $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ peut donc toujours être choisi de telle manière que le champ de vecteurs $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ soit identiquement nul.

Exercice 5.3

Ecrire les équations qui régissent l'évolution du potentiel-vecteur en jauge de radiation dans le cas du vide.

Solution :

Partant des équations (5.37) et (5.38) où l'on a posé $\Phi(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ il vient :

$$\frac{\partial \text{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{q(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \check{\check{\mathbf{rot}}} \check{\check{\mathbf{rot}}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$$

Exercice 5.4

Considérons un champ scalaire $F(\mathbf{x}, t)$ de la forme

$$F(\mathbf{x}, t) \equiv G(z) \quad \text{avec} \quad z \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} - ct$$

où le vecteur \mathbf{u} désigne un vecteur de \mathbb{R}^3 constant. A quelles conditions doit satisfaire la fonction $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et le vecteur \mathbf{u} pour que la fonction $F(\mathbf{x}, t)$ soit une solution de l'équation

$$\square F(\mathbf{x}, t) \equiv 0$$

Donner une interprétation du résultat.

Solution :

On commence par constater que

$$\square F(\mathbf{x}, t) \equiv \left[\mathbf{u}^2 - \frac{1}{c^2} c^2 \right] G(z) = 0$$

Par conséquent, la fonction $F(\mathbf{x}, t) = G(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} - ct)$ est une solution de l'équation $\square F(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ quelle que soit la fonction $G(z)$ doublement dérivable si $\|\mathbf{u}\| = 1$. L'interprétation est immédiate. Il suffit de constater que

$$F(\mathbf{x}, 0) = F(\mathbf{x} + c \mathbf{u} t, t)$$

Exercice 5.5

A l'aide de la formule (G.9) déterminer la solution $F(\mathbf{x}, t)$ de l'équation $\square F(\mathbf{x}, t) = 0$ qui correspond aux conditions initiales suivantes. A l'instant $t_0 = 0$

$$F(\mathbf{x}, 0) = \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\right)^3 \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{a^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad , \quad a > 0$$

Discuter le résultat. Considérer (de manière qualitative) la limite de cette solution $F(\mathbf{x}, t)$ lorsque $a \rightarrow +0$.

Solution :

De l'expression (G.9) on tire

$$F(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(\mathbf{x}, c|t|)} \left[\frac{\mathbf{grad}_{\mathbf{y}} F(\mathbf{y}, 0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} - F(\mathbf{y}, 0) \mathbf{grad}_{\mathbf{y}} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right] \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})$$

Il convient ensuite d'utiliser la variable $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ comme variable d'intégration. Dans ces conditions

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\|\mathbf{z}\|=c|t|} \left[\frac{\mathbf{grad}_{\mathbf{z}} F(\mathbf{x} + \mathbf{z}, 0)}{\|\mathbf{z}\|} - F(\mathbf{x} + \mathbf{z}, 0) \mathbf{grad}_{\mathbf{z}} \frac{1}{\|\mathbf{z}\|} \right] \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x} + \mathbf{z}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\right)^3 \int_{\|\mathbf{z}\|=c|t|} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} + \mathbf{z})^2}{a^2}\right) \left[-2 \frac{\mathbf{x} + \mathbf{z}}{a^2} \frac{1}{\|\mathbf{z}\|} + \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|^3} \right] \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x} + \mathbf{z}) \end{aligned}$$

Introduisons ensuite un système de coordonnées sphériques centré au point \mathbf{x} et tel que l'angle θ coïncide avec l'angle des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{z} . L'angle azimuthal ϕ est associé aux directions orthogonales au vecteur \mathbf{x} . Relativement aux nouvelles variables d'intégration ainsi définies il vient

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\right)^3 \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2 + c^2 t^2 + 2 \|\mathbf{x}\| c |t| \cos \theta}{a^2}\right) \\ &\times \left[-2 \frac{\|\mathbf{x}\| c |t| \cos \theta + c^2 t^2}{a^2} + 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\right)^3 \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2 + c^2 t^2}{a^2}\right) \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \exp\left(-2 \frac{\|\mathbf{x}\| c |t|}{a^2} \cos \theta\right) \\ &\times \left[-2 \frac{\|\mathbf{x}\| c |t|}{a^2} \cos \theta + \frac{a^2 - 2 c^2 t^2}{a^2} \right] \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \exp(A \cos \theta) = 2 \frac{\sinh A}{A}$$

et

$$\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \cos \theta \exp(A \cos \theta) = 2 \frac{\sinh A - A \cosh A}{A^2}$$

alors

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2 + c^2 t^2}{a^2}\right) \\ &\times \left[-2 \frac{\|\mathbf{x}\| c |t|}{a^2} \frac{-\sinh(2\|\mathbf{x}\| c |t|/a^2) + (2\|\mathbf{x}\| c |t|/a^2) \cosh(2\|\mathbf{x}\| c |t|/a^2)}{4 \|\mathbf{x}\|^2 c^2 t^2/a^4} \right. \\ &\left. + \frac{\sinh(2\|\mathbf{x}\| c |t|/a^2)}{\|\mathbf{x}\| c |t|/a^2} \frac{a^2 - 2 c^2 t^2}{a^2} \right] \end{aligned}$$

Et finalement, après quelques manipulations formelles élémentaires, on peut écrire

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, t) &= \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2 + c^2 t^2}{a^2}\right) \\ &\times \left[\frac{a^2 - c^2 t^2}{\|\mathbf{x}\| c |t|} \sinh\left(\frac{2\|\mathbf{x}\| c |t|}{a^2}\right) - \cosh\left(\frac{2\|\mathbf{x}\| c |t|}{a^2}\right) \right] \end{aligned}$$

Lorsque $a \rightarrow 0$, alors

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, t) &\cong \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2 + c^2 t^2}{a^2}\right) \\ &\times \left[\frac{-c |t|}{\|\mathbf{x}\|} \sinh\left(\frac{2\|\mathbf{x}\| c |t|}{a^2}\right) - \cosh\left(\frac{2\|\mathbf{x}\| c |t|}{a^2}\right) \right] \\ &\cong \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2 + c^2 t^2}{a^2}\right) \\ &\times \left[\frac{\|\mathbf{x}\| + c |t|}{\|\mathbf{x}\|} \exp\left(\frac{2\|\mathbf{x}\| c |t|}{a^2}\right) + \frac{\|\mathbf{x}\| - c |t|}{\|\mathbf{x}\|} \exp\left(-\frac{2\|\mathbf{x}\| c |t|}{a^2}\right) \right] \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, t) &\cong \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \\ &\times \left[\frac{\|\mathbf{x}\| + c |t|}{\|\mathbf{x}\|} \exp\left(-\frac{(\|\mathbf{x}\| - c |t|)^2}{a^2}\right) + \frac{\|\mathbf{x}\| - c |t|}{\|\mathbf{x}\|} \exp\left(-\frac{(\|\mathbf{x}\| + c |t|)^2}{a^2}\right) \right] \end{aligned}$$

En conclusion, à la limite $a \rightarrow 0$ la fonction $F(\mathbf{x}, t)$ est non nulle seulement sur la sphère $\|\mathbf{x}\| = c |t|$ à l'instant t .

Exercice 5.6

Déterminer les solutions $F_{ret/av}(\mathbf{x}, t)$ de l'équation de D'Alembert G.1 pour $\|\mathbf{x}\| > a$ lorsque

$$s(\mathbf{x}, t) = \frac{3c}{8\pi a^4} \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{x}\| \leq a \text{ et } |t| \leq a/c \text{ avec } a > 0. \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Ces solutions retardée et avancée sont respectivement données par les formules (G.13) et (G.16).

Commenter les résultats obtenus. Considérer (de manière qualitative) la limite de ces solutions lorsque $a \rightarrow +0$.

Indications : On commencera par noter que la densité de source $s(\mathbf{x}, t)$ peut être écrite sous la forme

$$s(\mathbf{x}, t) = \frac{3c}{8\pi a^4} \chi(a - \|\mathbf{x}\|) [\chi(t + a/c) - \chi(t - a/c)]$$

où le symbole $\chi(u)$, $u \in \mathbb{R}$ désigne la fonction de Heaviside

$$\chi(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \geq 0 \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Il est ensuite suggéré d'effectuer le calcul des solutions $F_{ret/av}(\mathbf{x}, t)$ en déterminant séparément les contributions dues à chacun des deux termes ci-dessus qui composent l'expression de la densité de source $s(\mathbf{x}, t)$.

Suggestion : Dans un graphe $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ représenter les cônes de lumière futurs (respectivement passés) attachés aux 4 points (aux 4 événements) de coordonnées $(\pm a, \pm a/c)$. Quelles sont les régions dans lesquelles les fonctions $F_{ret/av}(x, t)$ sont identiquement nulles ?

Solution :

Il découle de la formule (G.13) que la solution retardée est fournie par l'intégrale

$$F_{ret}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{3c}{8\pi a^4} \int_{\|\mathbf{y}\| \leq a} \frac{\chi(ct - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + a) - \chi(ct - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - a)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dV(\mathbf{y})$$

Il est évident que la solution retardée $F_{ret}(\mathbf{x}, t)$ est de la forme

$$F_{ret}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{3c}{8\pi a^4} (G_{ret}(\mathbf{x}, t + a/c) - G_{ret}(\mathbf{x}, t - a/c))$$

où $G_{ret}(\mathbf{x}, t) = \int_{\|\mathbf{y}\| \leq a} \frac{\chi(ct - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dV(\mathbf{y})$

Il suffit donc de déterminer l'expression de $G_{ret}(\mathbf{x}, t)$. Pour la suite posons

$$x = \|\mathbf{x}\|, \quad y = \|\mathbf{y}\| \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

Soit encore ϕ l'angle azimutal de rotation autour de la direction \mathbf{x} .

L'intégrant qui figure dans l'expression de la fonction $G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)$ est non-nul si et seulement si la fonction $\chi(c t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$ vaut 1, autrement dit si et seulement si

$$c t \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

où, vu nos hypothèses,

$$0 \leq x - a \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq x + a \quad , \quad \forall \mathbf{y} \quad \text{tel que} \quad \|\mathbf{y}\| \leq a$$

Pour la suite de la discussion il convient de considérer séparément les quatre situations suivantes :

- 1) $t \leq t_-(\mathbf{x})$ où $t_-(\mathbf{x}) = \frac{x - a}{c}$
- 2) $t_-(\mathbf{x}) \leq t \leq t_0(\mathbf{x})$ où $t_0(\mathbf{x}) = \frac{x}{c}$
- 3) $t_0(\mathbf{x}) \leq t \leq t_+(\mathbf{x})$ où $t_+(\mathbf{x}) = \frac{x + a}{c}$
- 4) $t_+(\mathbf{x}) \leq t$

Pour alléger l'écriture il convient d'adopter la notation

$$s \equiv s(x, t) = \frac{c t - x}{a}$$

Dans la situation 1)

$$c t \leq c t_-(\mathbf{x}) = x - a \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \text{donc} \quad s \leq -1$$

Par conséquent l'intégrant est identiquement nul dans le domaine d'intégration. Donc,

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) \equiv 0 \quad , \quad \forall s \leq -1$$

Dans la situation 2)

$$c t_-(\mathbf{x}) \leq c t \leq c t_0(\mathbf{x}) \quad \text{autrement dit} \quad -1 \leq s \leq 0$$

Par conséquent t est positif et la fonction $\chi(c t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = 1$ si et seulement si

$$(c t)^2 \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \equiv x^2 + y^2 - 2 x y \cos \theta$$

autrement dit si et seulement si

$$\frac{x^2 + y^2 - (c t)^2}{2 x y} \leq \cos \theta$$

Le problème est alors quelles sont les valeurs de $\theta \in [0, \pi]$ et $y \in [0, a]$ pour lesquelles l'inégalité qui précède est satisfaite ? Pour la commodité de l'exposé, posons

$$f_x(y) = \frac{x^2 + y^2 - (c t)^2}{2 x y} \equiv \frac{x^2 - (c t)^2}{2 x} \frac{1}{y} + \frac{y}{2 x}$$

Puisque $x^2 - (c t)^2$ est positif la fonction $f_x(y)$ décroît de manière monotone de $+\infty$ vers une valeur minimale

$$f_x(y_{\min}) = \frac{y_{\min}}{x} = \sqrt{1 - \left(\frac{c t}{x}\right)^2} \leq 1 \quad \text{où} \quad y = y_{\min} = \sqrt{x^2 - (c t)^2}$$

lorsque y varie de 0 à $+\infty$. Ensuite, depuis cette valeur minimale $f_x(y)$ croît de manière monotone vers $+\infty$. Comme $f_x(y) \geq 0$ lorsque y varie de 0 à $+\infty$ en passant par une valeur minimale inférieure ou égale à 1 la question est : quelles sont les deux valeurs de la variable y pour lesquelles $f_x(y) = 1$. On constate aisément que

$$f_x(y) = 1 \quad \text{lorsque} \quad y = y_- = x - c t \quad \text{ou} \quad y = y_+ = x + c t$$

Il est manifeste que

$$0 < y_- = x - c t \leq x - c t_-(\mathbf{x}) = a$$

et

$$y_+ = x + c t \geq x + c t_-(\mathbf{x}) = 2 x - a \geq x \geq a$$

En conclusion, dans le domaine d'intégration

$$\chi(c t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = 1$$

si et seulement si

$$0 < x - c t \leq y \leq a \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq \theta_{\max} = \arg \cos f_x(y)$$

Déterminons la valeur de la fonction $G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)$ qui correspond à cette situation 2). On a

$$\begin{aligned}
G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) &= \int_{\|\mathbf{y}\| \leq a} \frac{\chi(c t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dV(\mathbf{y}) \\
&= \int_{x-c t}^a y^2 dy \int_0^{\theta_{\max}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2 x y \cos \theta}} \\
&= 2\pi \int_{x-c t}^a y^2 dy \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 2 x y \cos \theta}}{x y} \Big|_0^{\theta_{\max}} \\
&= \frac{2\pi}{x} \int_{x-c t}^a y dy [\sqrt{x^2 + y^2 - 2 x y f(y)} - |x - y|] \\
&= \frac{2\pi}{x} \int_{x-c t}^a y dy [c t - |x - y|] \\
&= \frac{2\pi}{x} \left[(c t - x) \left(\frac{a^2}{2} - \frac{(x - c t)^2}{2} \right) + \left(\frac{a^3}{3} - \frac{(x - c t)^3}{3} \right) \right]
\end{aligned}$$

Finalement, lorsque $-1 \leq s \leq 0$

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi a^3}{3 x} \left[\frac{3}{4} s (1 - s^2) + \frac{1}{2} (1 + s^3) \right]$$

Dans la situation 3)

$$t_0(\mathbf{x}) \leq t \leq t_+(\mathbf{x}) \quad \text{autrement dit} \quad 0 \leq s \leq +1$$

Dans ce cas $x^2 - (c t)^2$ est négatif et par conséquent la fonction $f_x(y)$ croît de manière monotone de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque y varie de 0 à $+\infty$. Quelles sont les valeurs positives de y pour lesquelles $f_x(y) = -1$ et $f_x(y) = +1$? On constate aisément que

$$\begin{aligned}
f_x(y) &= -1 \quad \text{si} \quad y = y_- = -x + c t \leq -x + c t_+(\mathbf{x}) = a \\
\text{et} \\
f_x(y) &= +1 \quad \text{si} \quad y = y_+ = x + c t \geq x + c t_0(\mathbf{x}) = 2 x
\end{aligned}$$

En conclusion, dans le domaine d'intégration

$$\chi(c t - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = 1$$

si et seulement si

$$0 \leq y < -x + c t \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

puis si

$$0 < -x + c t \leq y \leq a \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq \theta_{\max} = \arg \cos f(y)$$

Par rapport à la situation précédente l'intégration par rapport aux angles θ et ϕ est inchangée. Il vient

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{2\pi}{x} \left(\int_0^{-x+ct} 2y^2 dy + \int_{-x+ct}^a y dy [ct - x + y] \right)$$

$$= \frac{2\pi}{x} \left[2 \frac{(-x+ct)^3}{3} + (-x+ct) \left(\frac{a^2}{2} - \frac{(-x+ct)^2}{2} \right) + \left(\frac{a^3}{3} - \frac{(-x+ct)^3}{3} \right) \right]$$

Finalement, lorsque $0 \leq s \leq +1$

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi a^3}{3x} \left[1 + \frac{3}{4} s (1 - s^2) - \frac{1}{2} (1 - s^3) \right]$$

On remarque alors que cette dernière expression coïncide avec l'expression de $G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)$ obtenue dans la situation 2).

Dans la situation 4)

$$t_+(\mathbf{x}) \leq t \quad \text{autrement dit} \quad +1 \leq s$$

et par conséquent

$$f_x(y) = -1 \quad \text{si} \quad y = y_- = -x + ct \leq -x + ct_+(\mathbf{x}) = a$$

Dans ces conditions

$$\chi(ct - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad 0 \leq y \leq a \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

et par conséquent, lorsque $+1 \leq s$

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{2\pi}{x} \int_0^a 2y^2 dy = \frac{4\pi a^3}{3x}$$

Les valeurs de la solution retardée $F_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)$ s'obtiennent directement à partir des valeurs des fonctions $G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t \pm a/c)$ autrement dit des valeurs de ces dernières fonctions pour s remplacé par $s \pm 1$. Il convient donc de traiter séparément les cinq situations que voici

$$F_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{32\pi a x} \times \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq -2 \\ -s^3 - 3s^2 + 4 & \text{si } -2 \leq s \leq -1 \\ -s^3 - 3s^2 + 4 & \text{si } -1 \leq s \leq 0 \\ +s^3 - 3s^2 + 4 & \text{si } 0 \leq s \leq +1 \\ +s^3 - 3s^2 + 4 & \text{si } +1 \leq s \leq +2 \\ 0 & \text{si } +2 \leq s \end{cases}$$

En résumé :

$$F_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{32\pi a x} \times \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq -2 \\ |s|^3 - 3|s|^2 + 4 & \text{si } -2 \leq s \leq +2 \\ 0 & \text{si } +2 \leq s \end{cases}$$

Lorsque $a \rightarrow 0$ alors

$$\lim_{a \rightarrow 0} F_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } c t \neq x \\ +\infty & \text{si } c t = x \end{cases}$$

Considérons pour terminer la fonction avancée $F_{\text{av}}(\mathbf{x}, t)$. Il découle de la formule (G.16) que la solution avancée est fournie par l'intégrale

$$F_{\text{av}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{3c}{8\pi a^4} \int_{\|\mathbf{y}\| \leq a} \frac{\chi(c t + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + a) - \chi(c t + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| - a)}{\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|} dV(\mathbf{y})$$

Il est évident que la solution avancée $F_{\text{av}}(\mathbf{x}, t)$ est de la forme

$$F_{\text{av}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{3c}{8\pi a^4} (G_{\text{av}}(\mathbf{x}, t + a/c) - G_{\text{av}}(\mathbf{x}, t - a/c))$$

où $G_{\text{av}}(\mathbf{x}, t) = \int_{\|\mathbf{y}\| \leq a} \frac{\chi(c t + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dV(\mathbf{y})$

Il suffit donc de déterminer l'expression de $G_{\text{av}}(\mathbf{x}, t)$. Or l'intégrand qui figure dans l'expression de la fonction $G_{\text{av}}(\mathbf{x}, t)$ est non-nul si et seulement si la fonction $\chi(c t + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$ vaut 1, autrement dit si et seulement si

$$c t \geq -\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

où, vu nos hypothèses,

$$0 \leq x - a \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq x + a \quad , \quad \forall \mathbf{y} \quad \text{tel que} \quad \|\mathbf{y}\| \leq a$$

La suite de la discussion peut être menée d'une manière similaire à celle qui a été adoptée ci-dessus pour déterminer les valeurs de la fonction $G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)$.

Pour la suite de la discussion il convient de considérer séparément les 4 situations suivantes :

- 1) $(-t) \leq t_-(\mathbf{x})$
- 2) $t_-(\mathbf{x}) \leq (-t) \leq t_0(\mathbf{x})$
- 3) $t_0(\mathbf{x}) \leq (-t) \leq t_+(\mathbf{x})$
- 4) $t_+(\mathbf{x}) \leq (-t)$

En résumé on parvient ainsi aux résultats que voici :

$$F_{\text{av}}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{32\pi a x} \times \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq -2 \\ |s|^3 - 3|s|^2 + 4 & \text{si } -2 \leq s \leq +2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq s \end{cases}$$

où maintenant le symbole s désigne la grandeur

$$s = \frac{c t + x}{a}$$

Lorsque $a \rightarrow 0$

$$\lim_{a \rightarrow 0} F_{av}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } c t \neq -x \\ +\infty & \text{si } c t = -x \end{cases}$$

Exercice 5.7

Soit un milieu matériel qui occupe une région Γ de l'espace et qui possède la propriété de s'opposer à toute "pénétration" d'un champ électromagnétique. Quelles sont les forces que subirait ce milieu mis en présence d'un champ électromagnétique, dans le vide.

Indication : Consulter la fin de la sous-section 5.4.1.

Solution :

Sur la surface du milieu $\mathbf{x} \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\parallel}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0} & \text{et} & & \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0} \\ \check{\mathbf{B}}_{\perp}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0} & \text{et} & & \check{\mathbf{H}}_{\perp}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Et pour le vecteur de Poynting et la densité de courant de quantité de mouvement

$$\mathbf{S}_{\perp}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_{\perp}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$$

$$\ell_{em}(\mathbf{x}, t) = u_{em}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{D}_{\perp}(\mathbf{x}, t)^2}{2 \varepsilon_0} + \frac{\check{\mathbf{B}}_{\parallel}(\mathbf{x}, t)^2}{2 \mu_0} = \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{x}, t)^2}{2} + \frac{\mu_0 \check{\mathbf{H}}_{\parallel}(\mathbf{x}, t)}{2}$$

De (5.70) et (7.75)

$$\begin{aligned} \tau_k(\mathbf{x}, t) &= \ell_{em}(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_k - E_{\perp k}(\mathbf{x}, t) \mathbf{D}_{\perp}(\mathbf{x}, t) - \check{H}_{\parallel k}(\mathbf{x}, t) \check{\mathbf{B}}_{\parallel}(\mathbf{x}, t) \\ &= p^{em}(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_k + \frac{1}{3} \left(\frac{\mathbf{D}_{\perp}(\mathbf{x}, t)^2}{\varepsilon_0} + \frac{\check{\mathbf{B}}_{\parallel}(\mathbf{x}, t)^2}{\mu_0} \right) \mathbf{e}_k \\ &\quad - \frac{D_{\perp k}(\mathbf{x}, t) \mathbf{D}_{\perp}(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon_0} - \frac{\check{B}_{\parallel k}(\mathbf{x}, t) \check{\mathbf{B}}_{\parallel}(\mathbf{x}, t)}{\mu_0} \end{aligned}$$

Ainsi, sur la surface $\partial\Gamma$, puisque le champ d'induction est tangent à cette dernière surface on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{x}, t) \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= p^{em}(\mathbf{x}, t) d\sigma_k(\mathbf{x}) + \frac{1}{3} \left(\frac{\mathbf{D}_\perp(\mathbf{x}, t)^2}{\varepsilon_0} + \frac{\check{\mathbf{B}}_\parallel(\mathbf{x}, t)^2}{\mu_0} \right) d\sigma_k(\mathbf{x}) \\ &\quad - \frac{D_{\perp k}(\mathbf{x}, t) \mathbf{D}_\perp(\mathbf{x}, t) \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Or, $dF_k(\mathbf{x}, t) = -\boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{x}, t) \cdot d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ et par conséquent

$$\begin{aligned} dF(\mathbf{x}, t) &= -p^{em}(\mathbf{x}, t) d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \frac{1}{3} \left(\frac{\mathbf{D}_\perp(\mathbf{x}, t)^2}{\varepsilon_0} + \frac{\check{\mathbf{B}}_\parallel(\mathbf{x}, t)^2}{\mu_0} \right) d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \\ &\quad + \frac{\mathbf{D}_\perp(\mathbf{x}, t)^2 d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Finalement

$$dF(\mathbf{x}, t) = -p^{em}(\mathbf{x}, t) d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \frac{1}{3} \left(2 \frac{\mathbf{D}_\perp(\mathbf{x}, t)^2}{\varepsilon_0} - \frac{\check{\mathbf{B}}_\parallel(\mathbf{x}, t)^2}{\mu_0} \right) d\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$$

Exercice 5.8

S'inspirer des formules (5.52) et (5.53) pour déterminer l'expression des potentiels retardé et avancé en jauge de Lorenz pour une charge électrique ponctuelle Q qui se meut avec une vitesse constante \mathbf{v} , de norme inférieure à la vitesse de la lumière. Déterminer ensuite le champ électromagnétique produit par cette charge en mouvement. Discuter la nature qualitative du résultat. Discuter l'influence de la vitesse \mathbf{v} . Y a-t-il production de rayonnement ?

Solution :

Sans perte de généralité on peut supposer que

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{v} t$$

Supposons le point \mathbf{x} et l'instant t fixés. Lorsque la charge électrique est ponctuelle le temps retardé $t_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) \leq t$ est fourni par la relation

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) \| = c (t - t_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t))$$

En revanche si l'on suppose qu'à chaque instant la charge électrique Q est uniformément répartie à l'intérieur d'une boule $B(\eta, \mathbf{v} t_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t))$ de rayon $\eta \ll \| \mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) \|$ centrée au point $\mathbf{v} t_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)$ alors le temps retardé $t_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) + \delta t_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t, \delta \mathbf{y})$ associé à un point $\mathbf{y} = \mathbf{v} t_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) + \delta \mathbf{y}$ à l'intérieur de cette dernière boule satisfait à la relation

$$\| \mathbf{x} - \delta \mathbf{y} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{v} \delta t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}, \delta \mathbf{y}) \| = c (t - t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) - \delta t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}, \delta \mathbf{y}))$$

Par conséquent, si l'on se limite au premier ordre en $\|\delta\mathbf{y}\|$ on obtient la relation

$$\delta t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}, \delta\mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})) \cdot \delta\mathbf{y}}{c^2 (t - t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}))}$$

Il convient alors de poser

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})\|}$$

et d'écrire

$$\delta t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}, \delta\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \delta\mathbf{y}/c}{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)/c}$$

Pour déterminer le potentiel retardé $\Phi_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)$ associé à cette dernière distribution uniforme de charge électrique à l'aide de l'expression 5.52 il convient d'introduire l'ensemble

$$\Gamma(\mathbf{x}, t, \eta) = \{ \delta\mathbf{y} \mid \|\delta\mathbf{y} - \mathbf{v} \delta t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}, \delta\mathbf{y})\| \leq \eta \}$$

des vecteurs $\delta\mathbf{y}$ tels que

$$\mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) + \delta\mathbf{y} \in B(\eta, \mathbf{v} (t_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) + \delta t_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t, \delta\mathbf{y})))$$

Dans ces conditions, si l'on néglige les contributions d'ordre supérieur, on peut écrire

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q}{4\pi\eta^3} \int_{\delta\mathbf{y} \in \Gamma(\mathbf{x}, t, \eta)} \frac{dV(\delta\mathbf{y})}{c (t - t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}) - \delta t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}, \delta\mathbf{y}))} \\ &\cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q}{4\pi\eta^3} \int_{\delta\mathbf{y} \in \Gamma(\mathbf{x}, t, \eta)} \frac{dV(\delta\mathbf{y})}{c (t - t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}))} \left(1 + \frac{\delta t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}, \delta\mathbf{y})}{t - t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})}\right) \\ &\cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q}{4\pi\eta^3} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})\|} \int_{\delta\mathbf{y} \in \Gamma(\mathbf{x}, t, \eta)} dV(\delta\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Or, au premier ordre

$$\int_{\delta\mathbf{y} \in \Gamma(\mathbf{x}, t, \eta)} dV(\delta\mathbf{y}) = \frac{4\pi\eta^3}{3} \frac{1}{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)/c}$$

puisque, au premier ordre toujours

$$\Gamma(\mathbf{x}, t, \eta) = \left\{ \delta\mathbf{y} \mid \left\| \delta\mathbf{y} - \frac{\mathbf{v}}{c} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \delta\mathbf{y}}{1 - \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}/c} \right\| \leq \eta \right\}$$

Autrement dit le domaine $\Gamma(\mathbf{x}, t, \eta)$ est délimité par un ellipsoïde. Finalement

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{1}{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)/c} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})\|} \\
&= \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})\| - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}))/c} \\
&= \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{1}{R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})}
\end{aligned}$$

Dans cette dernière expression on a posé

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{x} - \mathbf{v} t$$

et

$$\begin{aligned}
R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})\| - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}))/c \\
&= \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \boldsymbol{\rho}^2}
\end{aligned}$$

Pour établir la seconde égalité qui précède on commence par remarquer que

$$\|\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v} (t - t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}))\| = c (t - t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}))$$

d'où l'équation du second degré en $t - t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})$ que voici

$$(c^2 - v^2)(t - t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x}))^2 - 2 \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\rho} (t - t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})) - \boldsymbol{\rho}^2 = 0$$

de laquelle on déduit l'expression

$$c (t - t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})) = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left[\frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v}}{c} + \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \boldsymbol{\rho}^2} \right]$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \boldsymbol{\rho}^2} &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c (t - t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})) - \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v}}{c} \\
&= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \|\mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})\| - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{v} t) \cdot \mathbf{v}}{c} \\
&= \|\mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})\| - \frac{v^2}{c} (t - t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})) - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{v} t) \cdot \mathbf{v}}{c} \\
&= \|\mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})\| - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}(t, \mathbf{x})) \cdot \mathbf{v}}{c} \\
&= R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})
\end{aligned}$$

Posons

$$\boldsymbol{\rho}_{\parallel} = \frac{(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\rho}) \mathbf{v}}{v^2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\rho}_{\perp} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{\parallel}$$

On peut ainsi écrire

$$R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}) \equiv \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \rho^2} \equiv \sqrt{\rho_{\parallel}^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \rho_{\perp}^2}$$

Le potentiel-vecteur fourni par l'expression 5.53 découle d'une démarche parfaitement similairement à celle qui vient d'être adoptée pour le potentiel scalaire. On parvient ainsi l'expression

$$\mathbf{A}_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{v}}{R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})}$$

Il est important de noter que dans les expressions du potentiel scalaire $\Phi_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)$ et du potentiel-vecteur $\mathbf{A}_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)$ valables à l'extérieur de la boule $B(\eta, \mathbf{v} t_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t))$ le rayon η ne figure pas. Par conséquent les expressions obtenues pour ces grandeurs sont valables pour une charge électrique ponctuelle. Pour finalement déterminer les expressions du champ électrique et du champ d'induction il convient d'évaluer d'abord le gradient du potentiel scalaire $\Phi_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)$ et la dérivée par rapport au temps du potentiel-vecteur $\mathbf{A}_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)$. Il vient

$$\mathbf{grad} \left(\frac{1}{R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})} \right) = -\frac{\boldsymbol{\rho}_{\parallel} + (1 - v^2/c^2) \boldsymbol{\rho}_{\perp}}{R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})^3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})} \right) = \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\rho}}{R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})^3}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\mathbf{grad} \Phi_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ &= \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0} \left[\frac{\boldsymbol{\rho}_{\parallel} + (1 - v^2/c^2) \boldsymbol{\rho}_{\perp}}{R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})^3} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\rho}}{R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})^3} \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) &= \check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{grad} \Phi_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) \wedge \frac{\mathbf{v}}{c^2} \\ &= \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\mathbf{v}}{c^2} \wedge \frac{\boldsymbol{\rho}_{\parallel} + (1 - v^2/c^2) \boldsymbol{\rho}_{\perp}}{R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})^3} \end{aligned}$$

En résumé

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\boldsymbol{\rho}}{R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})^3} \quad \text{et} \quad \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{c^2}$$

Du point de vue qualitatif ces résultats montrent que le champ électrique de la charge électrique ponctuelle est radial et de symétrie cylindrique par rapport

à la trajectoire de celle-ci. Quant au champ d'induction il présente également la symétrie cylindrique. Les lignes de champ sont des cercles situés dans les plans orthogonaux à la trajectoire de la charge et centrés sur cette dernière.

Lorsque la vitesse \mathbf{v} est nulle bien entendu le champ électrique est coulombien à symétrie sphérique et le champ d'induction est partout nul. A vitesse faible, c'est-à-dire lorsque $\|\mathbf{v}\|/c \ll 1$, la première manifestation est l'apparition d'un champ d'induction et le champ électrique conserve l'allure d'un champ coulombien en translation.

Enfin, le comportement asymptotique du champ électrique lorsqu'on s'éloigne de la charge est d'ordre $O(\|\rho\|^{-2})$ et "a fortiori" celui du champ d'induction est du même ordre. Le vecteur de Poynting décroît donc avec la distance à la charge comme $O(\|\rho\|^{-4})$. Il n'y a donc pas de rayonnement puisque la puissance rayonnée est nulle à l'infini.

Exercice 5.9

Etudier la propagation d'une onde plane dans un milieu matériel homogène et isotrope dont la susceptibilité magnétique (voir (3.82)) est non-linéaire avec saturation. A saturation la norme de l'aimantation vaut M_∞ . La susceptibilité magnétique est de la forme

$$\chi_m(B(\mathbf{x}, t)) = \chi_{m0} \frac{1 - \exp(-B(\mathbf{x}, t)/B_\infty)}{B/B_\infty} \quad \text{où} \quad B(\mathbf{x}, t) = \|\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)\|$$

Dans cette expression $B_\infty = \mu_0 M_\infty/\chi_{m0}$ et le symbole χ_{m0} désigne la susceptibilité magnétique du milieu à champ d'induction faible, c'est-à-dire lorsque $B \ll B_\infty$. Quant aux propriétés diélectriques de ce milieu, elles sont celles du vide.

1. Quelle est la forme de la densité d'énergie électromagnétique dans ce milieu? Choisir les constantes d'intégration de manière que cette densité d'énergie s'annule en champ nul.
2. Etablir l'équation qui gouverne l'évolution du potentiel-vecteur en jauge de Coulomb.
3. Montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\square \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{fictif}}(\mathbf{x}, t)$$

où

$$\mathbf{j}_{\text{fictif}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot} \left(\chi_m(B(\mathbf{x}, t)) \mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right)$$

solution :

1. Selon la relation (3.83) la perméabilité magnétique du milieu a pour expression

$$\mu(B(\mathbf{x}, t)) = \frac{\mu_0}{1 - \chi_m(B(\mathbf{x}, t))} \quad \text{avec} \quad \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \mu(B(\mathbf{x}, t)) \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$$

et par conséquent la relation (4.33) prend la forme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_m(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t), \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t))}{\partial \check{B}^k} &= \check{H}_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\check{B}_k(\mathbf{x}, t)}{\mu(B(\mathbf{x}, t))} \\
&= \frac{1 - \chi_m(B(\mathbf{x}, t))}{\mu_0} \check{B}_k(\mathbf{x}, t) \\
&= (1 - \chi_m(B(\mathbf{x}, t))) \frac{B(\mathbf{x}, t)}{\mu_0} \frac{\partial B(\mathbf{x}, t)}{\partial \check{B}^k}
\end{aligned}$$

Autrement dit

$$\frac{\partial u_m(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t), \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t))}{\partial B} = (1 - \chi_m(B(\mathbf{x}, t))) \frac{B(\mathbf{x}, t)}{\mu_0}$$

et finalement la densité d'énergie électromagnétique peut être écrite

$$\begin{aligned}
&u_{em}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t), \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)) \\
&= \frac{\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)^2}{2\mu_0} - \frac{\chi_m}{\mu_0} \frac{B_\infty^2}{2} \left(\frac{B(\mathbf{x}, t)}{B_\infty} + \exp\left(-\frac{B(\mathbf{x}, t)}{B_\infty}\right) - 1 \right) \\
&= \frac{\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)^2}{2\mu_0} + \left(\frac{\chi(B(\mathbf{x}, t))}{\chi_m} - 1 \right) M_\infty B(\mathbf{x}, t)
\end{aligned}$$

2. Pour dégager l'équation qui gouverne l'évolution du potentiel-vecteur en jauge de Coulomb commençons par exprimer le rotationnel du champ magnétique à partir du potentiel-vecteur. Il vient

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) &= \check{\mathbf{rot}} \left(\frac{\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)}{\mu(B(\mathbf{x}, t))} \right) = \check{\mathbf{rot}} \left(\frac{\check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\mu(B(\mathbf{x}, t))} \right) \\
&= \mathbf{grad} \left(\frac{1}{\mu(B(\mathbf{x}, t))} \right) \wedge \check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\mu(B(\mathbf{x}, t))} \check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\
&= \mathbf{grad} \left(\frac{1}{\mu(B(\mathbf{x}, t))} \right) \wedge \check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\mu(B(\mathbf{x}, t))} \Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)
\end{aligned}$$

Puisque par ailleurs

$$\check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}$$

on parvient alors à la relation que voici

$$-\frac{\mathbf{grad} \mu(B(\mathbf{x}, t))}{\mu(B(\mathbf{x}, t))^2} \wedge \check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\mu(B(\mathbf{x}, t))} \Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}$$

Finalement l'équation qui gouverne l'évolution du potentiel-vecteur en jauge de Coulomb s'écrit

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \varepsilon_0 \mu(B(\mathbf{x}, t)) \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{grad} \mu(B(\mathbf{x}, t))}{\mu(B(\mathbf{x}, t))} \wedge \check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$$

où, rappelons-le : $B(\mathbf{x}, t) = \|\check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\|$

3. Compte tenu de l'expression de la perméabilité magnétique $\mu(B(\mathbf{x}, t))$ obtenue sous 1), l'équation qui précède prend maintenant la forme suivante

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{1 - \chi_m(B(\mathbf{x}, t))} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{grad} \chi_m(B(\mathbf{x}, t))}{1 - \chi_m(B(\mathbf{x}, t))} \wedge \check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$$

et par conséquent on peut aussi l'écrire sous la forme

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{fictif}}(\mathbf{x}, t)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\text{fictif}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \left[\mathbf{grad} \chi_m(B(\mathbf{x}, t)) \wedge \check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \chi_m(B(\mathbf{x}, t)) \Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \check{\mathbf{rot}} \left(\chi_m(B(\mathbf{x}, t)) \check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right) \end{aligned}$$

Exercice 5.10

On se place dans les conditions de l'exercice (5.9).

$$\chi_m(B(\mathbf{x}, t)) = \chi_m 0 \frac{1 - \exp(-B(\mathbf{x}, t)/B_\infty)}{B/B_\infty} \quad \text{où} \quad B(\mathbf{x}, t) = \|\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)\|$$

Etudier les solutions du type "onde plane" de l'équation,

$$\square \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}_{\text{fictif}}(\mathbf{x}, t)$$

où

$$\mathbf{j}_{\text{fictif}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mu_0} \check{\mathbf{rot}} \left(\chi_m(B(\mathbf{x}, t)) \check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right)$$

c'est-à-dire les solutions de la forme

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{A}_0 g(u(\mathbf{x}), t) \quad \text{où} \quad u(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$$

où \mathbf{n} est un vecteur unité qui fixe la direction de propagation de l'onde plane.

Se livrer à une approche perturbative des solutions stationnaires de l'équation qui précède en partant d'une solution onde plane stationnaire dans le vide

puis en traitant l'influence du milieu matériel comme un effet correctif du premier ordre qui vient s'ajouter à cette l'onde plane. Plus précisément, ce que l'on demande d'étudier de manière approchée c'est l'apparition d'harmoniques dues à la non-linéarité de la susceptibilité magnétique du milieu matériel.

Solution :

Commençons par dégager les restrictions apportées par la condition de jauge de Coulomb. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{grad} g(u(\mathbf{x}), t) = \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \\ &= \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent la condition de jauge de Coulomb est satisfaite si et seulement si

$$\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$$

Dans ces conditions, le champ d'induction est fourni par l'expression

$$\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{grad} g(u(\mathbf{x}), t) \wedge \mathbf{A}_0 = \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \mathbf{n} \wedge \mathbf{A}_0$$

et de là il suit que la norme du champ d'induction s'écrit

$$B(\mathbf{x}, t) = \|\check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\| = A_0 \left| \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right| \quad \text{où} \quad A_0 = \|\mathbf{A}_0\|$$

Ensuite venons-en à l'expression de la densité de courant "fictif". Cette densité de courant est fournie par l'expression

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{j}_{\text{fictif}}(\mathbf{x}, t) &= \check{\mathbf{rot}} \left(\chi_m(B(\mathbf{x}, t)) \check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= \check{\mathbf{rot}} \left(\chi_m(B(\mathbf{x}, t)) \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \mathbf{n} \wedge \mathbf{A}_0 \right) \\ &= \mathbf{grad} \left(\chi_m(B(\mathbf{x}, t)) \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right) \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{A}_0) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &\mathbf{grad} \left(\chi_m(B(\mathbf{x}, t)) \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right) \\ &= \mathbf{grad} \left[\chi_m \left(A_0 \left| \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right| \right) \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\chi_m \left(A_0 \left| \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right| \right) \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right] \mathbf{n} \end{aligned}$$

Finalement l'expression du courant "fictif" s'écrit

$$\mu_0 \mathbf{j}_{\text{fictif}}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial u} \left[\chi_m \left(A_0 \left| \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right| \right) \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right] \mathbf{A}_0$$

Compte tenu de la forme explicite de susceptibilité magnétique le facteur qui figure dans l'expression précédente de la densité de courant "fictif" prend finalement la forme explicite que voici

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left[\chi_m \left(A_0 \left| \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right| \right) \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right] \\ = & \chi_m \, 0 \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1 - \exp \left(- (A_0/B_\infty) \left| \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right| \right)}{(A_0/B_\infty) \left| \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right|} \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right] \\ = & \frac{\chi_m \, 0 \, B_\infty}{A_0} \frac{\partial}{\partial u} \left[\left[1 - \exp \left(- \frac{A_0}{B_\infty} \left| \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right| \right) \right] \text{sign} \left(\frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right) \right] \\ = & \chi_m \, 0 \exp \left(- \frac{A_0}{B_\infty} \left| \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right| \right) \frac{\partial^2 g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u^2} \end{aligned}$$

Finalement, après simplification relativement au facteur \mathbf{A}_0 on parvient à l'équation que voici pour la fonction $g(u(\mathbf{x}), t)$.

$$\frac{\partial^2 g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial t^2} = \chi_m \, 0 \exp \left(- \frac{A_0}{B_\infty} \left| \frac{\partial g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u} \right| \right) \frac{\partial^2 g(u(\mathbf{x}), t)}{\partial u^2}$$

Livrons-nous maintenant à une approche perturbative au premier ordre d'une solution de l'équation qui précède. Comme onde libre nous considérons l'onde plane monochromatique de pulsation ω que voici

$$g_0(u, t) = \sin(2\pi (u - ct)/\lambda) \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$$

Le symbole λ désigne la longueur d'onde correspondante. Autrement dit

$$g_0(u(\mathbf{x}), t) = \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) = \sin(k (u(\mathbf{x}) - ct)) \quad \text{où} \quad \mathbf{n} = \frac{c \mathbf{k}}{\omega}$$

Il est aisé de constater que la fonction $g_0(u, t)$ est une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 g_0(u, t)}{\partial u^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g_0(u, t)}{\partial t^2} = 0$$

Une solution au premier ordre

$$g(u, t) \cong g_0(u, t) + \chi_m \, 0 \, g_1(u, t)$$

est alors donnée par une fonction $g_1(u, t)$ solution de l'équation d'onde avec second membre

$$\frac{\partial^2 g_1(u, t)}{\partial u^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g_1(u, t)}{\partial t^2} = -k^2 \exp(-\alpha |\cos z|) \sin z$$

où pour alléger l'écriture on a posé

$$\alpha = \frac{k A_0}{B_\infty} \quad \text{et} \quad z = k (u - c t)$$

Pour traiter le problème il convient de faire intervenir le développement en série de Fourier du second membre de l'équation aux dérivées partielles ci-dessus. Puisque ce second membre est une fonction impaire de la variable z ce développement s'écrit

$$\exp(-\alpha |\cos z|) \sin z = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\alpha) \sin(j z)$$

où

$$a_j(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-\alpha |\cos z|) \sin z \sin(j z) dz \quad , \quad \forall j > 0$$

Mais on constate immédiatement que cette dernière expression du coefficient $a_j(\alpha)$ est nulle lorsque la fonction $\sin(j z)$ est impaire par rapport à la valeur $z = \pi/2$. Dans ces conditions $a_j(\alpha) = 0$, $j = 2, 4, \dots$ et par conséquent on peut écrire

$$\exp(-\alpha |\cos z|) \sin z = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{2\ell+1}(\alpha) \sin((2\ell+1) z)$$

où

$$a_{2\ell+1}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-\alpha |\cos z|) \sin z \sin((2\ell+1) z) dz \quad , \quad \forall \ell = 0, 1, 2, \dots$$

Finalement l'équation aux dérivées partielles qui fournit la fonction $g_1(u, t)$ prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_1(u, t)}{\partial u^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g_1(u, t)}{\partial t^2} &= -k^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{2\ell+1}(\alpha) \sin((2\ell+1)k(u - c t)) \\ &= -k^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{2\ell+1}(\alpha) [\sin((2\ell+1)k u) \cos((2\ell+1) \omega t) \\ &\quad - \cos((2\ell+1)k u) \sin((2\ell+1) \omega t)] \end{aligned}$$

Or on s'intéresse à une solution qui décrit la propagation des ondes en régime permanent. On recherche donc une solution de la forme

$$g_1(u, t) = k^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{2\ell+1}(\alpha) \left[c_{2\ell+1}(u) \sin((2\ell+1)\omega t) + d_{2\ell+1}(u) \cos((2\ell+1)\omega t) \right]$$

où, rappelons-le $\omega = c k$. L'introduction de ce développement dans l'équation aux dérivées partielles suivie de l'identification des termes en $\sin((2\ell+1)\omega t)$ et $\cos((2\ell+1)\omega t)$ conduit aux équations différentielles linéaires du second ordre avec second membre qui suivent pour les fonction $c_{2\ell+1}(u)$ et $d_{2\ell+1}(u)$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 c_{2\ell+1}(u)}{du^2} + \frac{(2\ell+1)^2 \omega^2}{c^2} c_{2\ell+1}(u) &= \cos((2\ell+1)k u) \\ \frac{d^2 d_{2\ell+1}(u)}{du^2} + \frac{(2\ell+1)^2 \omega^2}{c^2} d_{2\ell+1}(u) &= -\sin((2\ell+1)k u) \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que les fonctions

$$c_{2\ell+1}(u) = \frac{u \sin((2\ell+1)k u)}{2} \quad \text{et} \quad d_{2\ell+1}(u) = \frac{u \cos((2\ell+1)k u)}{2}$$

sont deux solutions particulières des équations différentielles qui précèdent. La solution particulière $g_1(u, t)$ qui en découle est donc de la forme

$$g_1(u, t) = k^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{2\ell+1}(\alpha) \frac{u \cos((2\ell+1)k(u - ct))}{2}$$

Cette solution est ainsi définie à une solution de l'équation sans second membre

$$\frac{\partial^2 g_1(u, t)}{\partial u^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g_1(u, t)}{\partial t^2} = 0$$

près. Mais cette solution de l'équation sans second membre qui précède peut être ramenée à une redéfinition de l'onde non perturbée $g_0(u, t)$. Mais de toute manière le résultat qui vient d'être établi répond à la question posée.

Exercice 5.11

Effectuer des développements similaires à ceux qui sont présentés à la sous-section 5.4.4 mais pour une situation où la fonction de réponse du milieu matériel diélectrique est de la forme

$$\chi_E^P(t) = \frac{\chi_0}{\tau} \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{autrement} \end{array} \right\}.$$

où le symbole χ_0 désigne une constante physique sans dimension telle que $0 < \chi_0 < 1$.

Ecrire l'équivalent de l'équation d'onde (5.116). Déterminer l'équivalent de la relation (5.119) puis les correspondantes des expressions (5.122) et (5.123) lorsque les vecteurs $\mathbf{k}(\omega)$ et $\boldsymbol{\kappa}(\omega)$ ont la même orientation. Discuter la dissipation d'énergie. Qu'en est-il des hystérèses ?

Solution :

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi_E^P(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{x}, t') dt' = \frac{\varepsilon_0 \chi_0}{\tau} \int_{t-\tau}^t \mathbf{E}(\mathbf{x}, t') dt'$$

Par analogie avec (5.111) on pose

$$\begin{aligned} \chi_E^P(\omega) &= \int_0^{+\infty} d\tau' \chi_E^P(\tau') \exp(i\omega\tau') = \int_0^\tau d\tau' \frac{\chi_0}{\tau} \exp(i\omega\tau') \\ &= \chi_0 \frac{\exp(i\omega\tau) - 1}{i\omega\tau} \end{aligned}$$

et

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(1 + \chi_E^P(\omega)) = \varepsilon_0 \left(1 - i \chi_0 \frac{\exp(i\omega\tau) - 1}{\omega\tau} \right)$$

De (5.101), puisque $\mu(\omega) = \mu_0$, il vient

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \chi_0 \frac{\exp(i\omega\tau) - 1}{\omega\tau} \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{0}$$

et

$$\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = 0$$

Par conséquent,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{E}(\omega) \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad \text{où} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\omega) = 0$$

est une solution de l'équation précédente dès lors que $\mathbf{k}(\omega) \in \mathbb{C}^3$ satisfait à la condition

$$\frac{\mathbf{k}(\omega)^2}{\omega^2} = \varepsilon(\omega) \mu_0 = \frac{1}{c^2} \left(1 - i \chi_0 \frac{\exp(i\omega\tau) - 1}{\omega\tau} \right)$$

Par conséquent

$$\frac{\mathbf{k}_0(\omega)^2 - \boldsymbol{\kappa}(\omega)^2}{\omega^2} = \frac{1}{c^2} \left(1 + \chi_0 \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} \right)$$

et

$$\frac{\mathbf{k}_0(\omega) \cdot \boldsymbol{\kappa}(\omega)}{\omega^2} = \frac{\chi_0}{2 c^2} \left(\frac{1 - \cos(\omega\tau)}{\omega\tau} \right)$$

Poser $k_0(\omega) = \|\mathbf{k}_0(\omega)\|$ et $\kappa(\omega) = \|\boldsymbol{\kappa}(\omega)\|$ si ces vecteurs sont de même orientation alors

$$\frac{k_0(\omega)^4}{\omega^4} - \frac{1}{c^2} \left(1 + \chi_0 \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}\right) \frac{k_0(\omega)^2}{\omega^2} - \frac{\chi_0^2}{4c^4} \left(\frac{1 - \cos(\omega\tau)}{\omega\tau}\right)^2 = 0$$

et les correspondantes des relations (5.122) et (5.123) s'écrivent

$$\frac{k_0(\omega)^2}{\omega^2} = \frac{1}{2c^2} \left[\sqrt{1 + 2\chi_0 \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} + 2\chi_0^2 \frac{1 - \cos(\omega\tau)}{(\omega\tau)^2}} + \left(1 + \chi_0 \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}\right) \right]$$

$$\frac{\kappa(\omega)^2}{\omega^2} = \frac{1}{2c^2} \left[\sqrt{1 + 2\chi_0 \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} + 2\chi_0^2 \frac{1 - \cos(\omega\tau)}{(\omega\tau)^2}} - \left(1 + \chi_0 \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}\right) \right]$$

Venons-en à la dissipation d'énergie. La conductivité effective du milieu $\sigma_{eff}(\omega)$ à la pulsation ω est donnée par l'expression (?). Par conséquent, puisque $\mu(\omega) = \mu_0$,

$$\sigma_{eff}(\omega) = \omega \operatorname{Im}(\varepsilon(\omega)) = \frac{\varepsilon_0 \chi_0}{\tau} (1 - \cos(\omega\tau)) \geq 0$$

Pour les cycles d'hystérèse commençons par noter que l'argument $\delta(\omega)$ du nombre complexe $\varepsilon(\omega)$ est fourni par la relation

$$\tan \delta(\omega) = \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)} = \frac{\chi_0 (1 - \cos(\omega\tau))}{\omega\tau + \chi_0 \sin(\omega\tau)} \quad \text{où } 0 \leq \delta(\omega) \leq \frac{\pi}{2}$$

Et dans ces conditions

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t) = |\varepsilon(\omega)| \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i(\omega t - \delta(\omega)))$$

En phase le champ de déplacement électrique est en retard par rapport au champ électrique.

Exercice 5.12

On considère un milieu diélectrique qui présente une réponse diélectrique locale retardée de la forme

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \left(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \int_0^{+\infty} \chi_E^P(t') \mathbf{E}(\mathbf{x}, t - t') dt' \right)$$

où la susceptibilité électrique $\chi_E^P(t')$ est telle que

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right)$$

où les symboles ω_{plasma} , ω_0 et γ désignent des constantes. La constante ω_0 fixe la position d'une fréquence de résonance du milieu diélectrique dont la constante $\gamma < 2\omega_0$ fixe la largeur.

1. Transcrire la relation locale entre le champ de déplacement électrique et le champ électrique en une relation instantanée impliquant des dérivées par rapport au temps d'ordre arbitrairement élevé pour le champ électrique. Dans ce but on fera intervenir le développement en série de Taylor du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t-t')$ par rapport à t' . Evaluer de manière explicite les termes de ce développement jusqu'au terme en $\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)/\partial t^2$.
2. Montrer que la série obtenue sous 1) peut être obtenue à l'aide de la transcription formelle,

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$$

Solution :

On a

$$\chi_E^P(\omega) = \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma \omega}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \chi_E^P(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_E^P(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma \omega} \exp(-i\omega t) d\omega \end{aligned}$$

Pour évaluer l'intégrale qui précède, faisons appel au théorème des résidus. Les pôles de l'intégrand sont donc les racines ω_{\pm} de l'équation

$$\begin{aligned} \omega^2 + i\gamma \omega - \omega_0^2 &= 0 \quad \text{donc} \quad \omega = \omega_{\pm} = -i \frac{\gamma}{2} \pm \Omega \\ \text{où} \quad \Omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} > 0 \end{aligned}$$

Les résidus correspondants $R_{\pm}(t)$ s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} R_{\pm}(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\mp \omega_{\text{plasma}}^2}{\omega_+ - \omega_-} \exp(-i\omega_{\pm} t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\mp \omega_{\text{plasma}}^2}{2 \Omega} \exp(\mp i \Omega t) \exp(-\gamma t/2) \end{aligned}$$

Si $t < 0$ alors l'intégrand tend suffisamment rapidement vers 0 sur le demi-cercle à l'infini $\text{Im}(\omega) > 0$ pour que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma \omega} \exp(-i\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(+)} \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma \omega} \exp(-i\omega t) d\omega = 0 \end{aligned}$$

où le symbole $\Gamma_{(+)}$ désigne le chemin d'intégration de $-\infty$ à $+\infty$ fermé par le demi-cercle à l'infini dans le demi-plan complexe $Im\omega \geq 0$ parcouru dans le sens trigonométrique positif. Comme les pôles de l'intégrand appartiennent au demi-plan complexe $Im\omega \leq 0$ le théorème des résidus nous permet de conclure que la valeur de l'intégrale est nulle.

Par contre lorsque $t > 0$ l'intégrand tend suffisamment rapidement vers 0 sur le demi-cercle à l'infini $Im(\omega) < 0$ pour que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma \omega} \exp(-i\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{(-)}} \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma \omega} \exp(-i\omega t) d\omega \end{aligned}$$

où le symbole $\Gamma_{(-)}$ désigne le chemin d'intégration de $-\infty$ à $+\infty$ fermé par le demi-cercle à l'infini dans le demi-plan complexe $Im\omega \leq 0$ parcouru dans le sens trigonométrique négatif. Comme les pôles de l'intégrand appartiennent au demi-plan complexe $Im\omega \leq 0$ le théorème des résidus nous permet de conclure que la valeur de l'intégrale est l'opposé de la somme des résidus multipliée par $2i\pi$. Autrement dit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma \omega} \exp(-i\omega t) d\omega &= -2i \pi (R_+(t) + R_-(t)) \\ &= \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{\Omega} \sin(\Omega t) \exp(-\gamma t/2) \end{aligned}$$

En résumé

$$\chi_E^P(t) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } t \leq 0 \\ (\omega_{\text{plasma}}^2/\Omega) \sin(\Omega t) \exp(-\gamma t/2) & \text{lorsque } t > 0 \end{cases}$$

Abordons maintenant question 1). Le développement de l'expression du champ électrique en puissance de t' s'écrit

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t - t') = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (t')^n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$$

et par conséquent on peut aussi écrire

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \chi_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right]$$

Par ailleurs soit

$$\begin{aligned}
\chi_n &= \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{\Omega} \int_0^{+\infty} (t')^n \sin(\Omega t') \exp(-\gamma t'/2) dt' \\
&= \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{\Omega} \left(-2 \frac{\partial}{\partial \gamma}\right)^n \int_0^{+\infty} \sin(\Omega t') \exp(-\gamma t'/2) dt' \\
&= \omega_{\text{plasma}}^2 \left(-2 \frac{\partial}{\partial \gamma}\right)^n \frac{1}{\gamma^2/4 + \Omega^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $n = 0, 1$, et 2 ,

$$\begin{aligned}
\chi_0 &= \omega_{\text{plasma}}^2 \frac{1}{\gamma^2/4 + \Omega^2} = \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{\omega_0^2} \\
\chi_1 &= \omega_{\text{plasma}}^2 \frac{\gamma}{(\gamma^2/4 + \Omega^2)^2} = \frac{\omega_{\text{plasma}}^2 \gamma}{\omega_0^4} \\
\chi_2 &= \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{2} \frac{3\gamma^2 - 4\Omega^2}{(\gamma^2/4 + \Omega^2)^3} = 2 \frac{\omega_{\text{plasma}}^2 (\gamma^2 - \omega_0^2)}{\omega_0^6}
\end{aligned}$$

Ensuite, remarquons que pour $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \chi_n z^n &= \omega_{\text{plasma}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma}\right)^n \frac{1}{\gamma^2/4 + \Omega^2} \\
&= \omega_{\text{plasma}}^2 \frac{1}{(\gamma/2 + z)^2 + \Omega^2} \\
&= \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{z^2 + \gamma z + \omega_0^2} = \chi_E^P(i z) \quad \text{où } \omega_0 = \sqrt{\Omega^2 + \gamma^2/4}
\end{aligned}$$

Si dans cette dernière expression on remplace z par $-i\omega$ on a bien

$$\chi_E^P(\omega) = \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Ainsi, de manière formelle, par remplacement de ω par l'opérateur de dérivation par rapport au temps $i \partial/\partial t$, on parvient à la relation suivante

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \chi_E^P\left(i \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$$

et par suite

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon\left(i \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$$

Ainsi, en première approximation

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon_0 \left[\left(1 + \frac{\omega_{\text{plasma}}^2}{\omega_0^2}\right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) - \frac{\omega_{\text{plasma}}^2 \gamma}{\omega_0^4} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega_{\text{plasma}}^2 (\gamma^2 - \omega_0^2)}{\omega_0^6} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + \dots \right]
\end{aligned}$$

Exercice 5.13

On considère un milieu conducteur dont la conductivité dépend de la fréquence de la manière suivante

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0 \gamma}{\gamma - i\omega}$$

La constante diélectrique et la perméabilité magnétique de ce milieu sont celles du vide. Etudier la propagation des ondes planes dans un tel milieu.

Solution :

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, \omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$$

Alors, vu (5.98)

$$i\omega q(\mathbf{x}, \omega) = \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0} q(\mathbf{x}, \omega)$$

Par conséquent

$$\left(\frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0} - i\omega\right) q(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad \text{et donc} \quad q(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \quad \text{et} \quad \omega$$

De (5.100) et (5.101)

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = -i\omega \mu_0 \sigma(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$$

et de (5.94)

$$\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)}{i\omega}$$

Solution onde plane. $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3$. $\mathbf{k}(\omega) \in \mathbb{C}^3$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{x}) \quad \text{où} \quad \mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{E}_0 = 0$$

Alors

$$-\mathbf{k}(\omega)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = -i\omega \mu_0 \sigma(\omega)$$

Poser

$$\mathbf{k}(\omega) = \mathbf{k}_0(\omega) + i\boldsymbol{\kappa}(\omega) \quad \text{où} \quad \mathbf{k}_0(\omega) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\kappa}(\omega) \in \mathbb{R}^3$$

d'où, compte tenu de la forme explicite de la conductivité $\sigma(\omega)$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_0(\omega)^2 - \boldsymbol{\kappa}(\omega)^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \sigma_0 \gamma \frac{\omega^2}{\gamma^2 + \omega^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega^2 + \gamma(\gamma - \sigma_0/\varepsilon_0)}{\gamma^2 + \omega^2} \\ 2 \mathbf{k}_0(\omega) \cdot \boldsymbol{\kappa}(\omega) &= \mu_0 \sigma_0 \gamma \frac{\gamma \omega}{\gamma^2 + \omega^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\gamma \sigma_0 / \varepsilon_0}{\omega} \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Limitons notre discussion au cas où l'orientation des vecteurs $\mathbf{k}_0(\omega)$ et $\boldsymbol{\kappa}(\omega)$ est la même et posons

$$k_0(\omega) = \|\mathbf{k}_0(\omega)\| \quad \text{et} \quad \kappa(\omega) = \|\boldsymbol{\kappa}(\omega)\|$$

$$\begin{aligned} \frac{k_0(\omega)^2}{\omega^2} &= \frac{1}{2 c^2} \left[\sqrt{1 - 2 \frac{\gamma \sigma_0 / \varepsilon_0}{\gamma^2 + \omega^2} + \frac{(\gamma \sigma_0 / \varepsilon_0)^2}{\omega^2} \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2}} + \left(1 - \frac{\gamma \sigma_0 / \varepsilon_0}{\gamma^2 + \omega^2}\right) \right] \\ \frac{\kappa(\omega)^2}{\omega^2} &= \frac{1}{2 c^2} \left[\sqrt{1 - 2 \frac{\gamma \sigma_0 / \varepsilon_0}{\gamma^2 + \omega^2} + \frac{(\gamma \sigma_0 / \varepsilon_0)^2}{\omega^2} \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2}} - \left(1 - \frac{\gamma \sigma_0 / \varepsilon_0}{\gamma^2 + \omega^2}\right) \right] \end{aligned}$$

Exercice 5.14

*La théorie de Born et Infeld a été développée pour attribuer une masse d'origine électromagnétique aux particules chargées assimilée à des point matériels.*¹

Dans cette théorie la densité d'énergie du champ électromagnétique dans le vide est donnée par une l'expression de la forme

$$u_{BI}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t), \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)) = u_\infty \left[\sqrt{1 + \frac{1}{u_\infty} \left(\frac{\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)^2}{\varepsilon_0} + \frac{\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)^2}{\mu_0} \right)} - 1 \right]$$

dans laquelle le symbole u_∞ désigne une constante positive qui possède la dimension d'une densité d'énergie.

1. Vérifier qu'en champ électromagnétique faible la densité d'énergie de Born et Infeld tend vers la densité d'énergie (5.21).
2. Quelles sont les relations phénoménologiques propres à cette théorie de Born et Infeld ?
3. Quelle est l'énergie électromagnétique E_{BI} que cette théorie attribue à une charge électrique ponctuelle immobile de valeur Q ?
4. Exprimer cette énergie sous la forme

$$E_{BI} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_0}$$

1. M. Born, Proc. Roy. Soc. (London) **A143**, 410 (1934) ; M. Born and L. Infeld, *ibid.* **144**, 425 (1934) ; **147**, 522 (1934) ; **A150**, 141 (1935).

puis montrer que

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{a} \int_0^\infty \left[\sqrt{1+u^4} - u^2 \right] du \quad \text{où} \quad a = \sqrt{\frac{|Q|}{4\pi\sqrt{\varepsilon_0} u_\infty}}$$

5. Si la particule considérée est un électron (de masse m et de charge électrique e) quel est la valeur du rayon r_0 lorsque $E_{BI} = mc^2$?

Solution :

1. Il suffit de développer $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \dots$. Alors

$$\begin{aligned} & u_{BI}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t), \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)) \\ &= u_\infty \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{u_\infty} \left(\frac{\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)^2}{\varepsilon_0} + \frac{\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)^2}{\mu_0} \right) + O(u_\infty^{-2}) - 1 \right] \\ &= \frac{\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)^2}{2\mu_0} + O(u_\infty^{-1}) \end{aligned}$$

2. Poser

$$\chi_\infty(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{u_\infty} \left(\frac{\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)^2}{\varepsilon_0} + \frac{\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)^2}{\mu_0} \right)$$

Alors

$$E_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u_{BI}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t), \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t))}{\partial D^k} = \frac{D_k(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \chi_\infty(\mathbf{x}, t)}}$$

$$\check{H}_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u_{BI}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t), \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t))}{\partial \check{B}^k} = \frac{\check{B}_k(\mathbf{x}, t)}{\mu_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \chi_\infty(\mathbf{x}, t)}}$$

Ainsi,

$$\|\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)\| \rightarrow \sqrt{\frac{u_\infty}{\varepsilon_0}} = E_\infty \quad \text{lorsque} \quad \|\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)\| \rightarrow \infty$$

$$\|\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)\| \rightarrow \sqrt{\frac{u_\infty}{\mu_0}} = \check{H}_\infty \quad \text{lorsque} \quad \|\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)\| \rightarrow \infty$$

$$u_\infty = \varepsilon_0 E_\infty^2 \quad \text{et} \quad \check{H}_\infty = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_\infty$$

3. Dans ce cas, pour une charge électrique ponctuelle immobile située à l'origine

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} \quad \text{et} \quad \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$$

Par conséquent

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{x}\|^4 + a^4}} \quad \text{où} \quad a^4 = \frac{1}{u_\infty \varepsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi}\right)^2 = \left(\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 E_\infty}\right)^2$$

Lorsque $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ le comportement du champ électrique tend vers celui de l'électrostatique linéaire du vide. En revanche lorsque $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ l'intensité du champ électrique tend vers la valeur limite E_∞ . Finalement l'énergie électromagnétique totale du système E est donnée par l'expression

$$\begin{aligned} E &= \int_{\mathbb{R}^3} u_{BI}(\mathbf{D}(\mathbf{x}, t), \mathbf{0}) dV(\mathbf{x}) \\ &= \int_0^\infty u_\infty \left(\sqrt{1 + \frac{1}{u_\infty} \frac{\mathbf{D}(r)^2}{\varepsilon_0}} - 1 \right) 4\pi r^2 dr \\ &= \varepsilon_0 E_\infty^2 \int_0^\infty \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 E_\infty}\right)^2 \frac{1}{r^4}} - 1 \right) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{a^4} \int_0^\infty \left(\sqrt{1 + \frac{a^4}{r^4}} - 1 \right) r^2 dr \end{aligned}$$

Dans ces expressions nous avons posé $r = \|\mathbf{x}\|$. Pour la suite procédons au changement de variable d'intégration de r en $r = a u$. Il vient

$$E = \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{a} \int_0^\infty (\sqrt{u^4 + 1} - u^2) du$$

4. Si l'on convient de poser

$$E = \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r_0} \quad \text{où} \quad \frac{1}{r_0} = \frac{1}{a} \int_0^\infty (\sqrt{u^4 + 1} - u^2) du$$

alors, si la particule concernée est l'électron, donc $Q = e$

$$E = m c^2 \quad \text{et par conséquent} \quad r_0 = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 m c^2}$$

Cette dernière grandeur est appelée le rayon classique de l'électron. Finalement dans le cas de l'électron

$$E_\infty = \frac{|Q|}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{a^2} = \frac{|Q|}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{(r_0)^2} \frac{1}{I^2}$$

où

$$I = \int_0^\infty (\sqrt{u^4 + 1} - u^2) du = \int_0^\infty \left((u^2 + 1) \sqrt{1 - \frac{2u^2}{(u^2 + 1)^2}} - u^2 \right) du$$

Or

$$0 \leq \frac{2u^2}{(u^2 + 1)^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Donc la série suivante converge quel que soit $u \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{1 - \frac{2u^2}{(u^2 + 1)^2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{2u^2}{(u^2 + 1)^2} - \sum_{n=2}^\infty \frac{(2n-3)!!}{2^n} \frac{1}{n!} \left(\frac{2u^2}{(u^2 + 1)^2} \right)^n$$

Par conséquent on peut écrire

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \left((u^2 + 1) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2u^2}{(u^2 + 1)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{n=2}^\infty \frac{(2n-3)!!}{2^n} \frac{1}{n!} \left(\frac{2u^2}{(u^2 + 1)^2} \right)^n \right) - u^2 \right) du \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{u^2 + 1} - \sum_{n=2}^\infty \frac{(2n-3)!!}{n!} \frac{u^{2n}}{(u^2 + 1)^{2n-1}} \right) du \\ &< \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercice 5.15

Déterminer la **vitesse de groupe** $u_{gr}(\omega)$ des ondes de l'exemple d'électrodynamique locale, linéaire présenté à la sous-section 5.4.7. La vitesse de groupe, au delà d'une certaine fréquence dépasse la vitesse de propagation de la lumière dans le vide. Pouvez-vous expliquer l'origine de cette "anomalie" ?

Indication : Rappelons que la vitesse de groupe d'une onde est donnée par l'inverse de la dérivée de la relation de dispersion $k_0(\omega)$. Autrement dit $u_{gr}(\omega) = (dk_0(\omega)/d\omega)^{-1}$.

Solution :

Pour traiter cette question il convient de commencer par remarquer, grâce à quelques manipulations formelles élémentaires, que l'expression (5.122) implique la relation suivante

$$k_0(\omega)^4 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \alpha(\omega)) k_0(\omega)^2 - \frac{1}{4} \frac{\omega^4}{c^4} (\omega \tau \alpha(\omega))^2 \equiv 0$$

Ce point étant acquis, dérivons l'identité précédente membre à membre par rapport à la variable ω^2 de manière à dégager la dérivée de $k_0(\omega)^2$ par rapport à cette dernière variable. On obtient ainsi la nouvelle identité

$$\begin{aligned} & \left(2 k_0(\omega)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \alpha(\omega)) \right) \frac{d(k_0(\omega)^2)}{d(\omega^2)} \\ & - \frac{k_0(\omega)^2}{c^2} \frac{d}{d(\omega^2)} (\omega^2 (1 + \alpha(\omega))) - \frac{1}{4 c^2} \frac{d}{d(\omega^2)} \left(\frac{\omega^4}{c^2} (\omega \tau \alpha(\omega))^2 \right) \equiv 0 \end{aligned}$$

qui, toutes dérivations effectuées, prend la forme

$$\begin{aligned} & \left(2 k_0(\omega)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \alpha(\omega)) \right) \frac{d(k_0(\omega)^2)}{d(\omega^2)} \\ & \equiv \frac{1}{c^2} \left[\left(1 + \frac{\alpha(\omega)}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) k_0(\omega)^2 + \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{3 + \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \omega^2 \tau^2 \alpha(\omega)^2 \right] \end{aligned}$$

Finalement, après quelques manipulations formelles faisant usage de la définition (5.122) de la vitesse de phase, on parvient à l'expression qui va suivre pour la dérivée de $k_0(\omega)^2$ par rapport à ω^2

$$\frac{d(k_0(\omega)^2)}{d(\omega^2)} \equiv \frac{1}{4 c^2} \frac{4 (1 + \omega^2 \tau^2 + \alpha(\omega)) + (3 + \omega^2 \tau^2) \omega^2 \tau^2 \alpha(\omega)^2 (u_{ph}(\omega)/c)^2}{(1 + \omega^2 \tau^2) [2 - (1 + \alpha(\omega)) (u_{ph}(\omega)/c)^2]}$$

Or, comme il est aisé de le constater,

$$\frac{d(k_0(\omega)^2)}{d(\omega^2)} = \frac{k_0(\omega)}{\omega} \frac{dk_0(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{u_{ph}(\omega) u_{gr}(\omega)}$$

Nous pouvons par conséquent en conclure que

$$\frac{u_{gr}(\omega)}{c} = \frac{c}{u_{ph}(\omega)} \frac{4 (1 + \omega^2 \tau^2) [2 - (1 + \alpha(\omega)) (u_{ph}(\omega)/c)^2]}{4 (1 + \omega^2 \tau^2 + \alpha(\omega)) + (3 + \omega^2 \tau^2) \omega^2 \tau^2 \alpha(\omega)^2 (u_{ph}(\omega)/c)^2}$$

La figure 5.1 décrit le comportement du rapport de la vitesse de groupe à la vitesse de la lumière dans le vide en fonction de la grandeur sans dimension $\omega \tau$

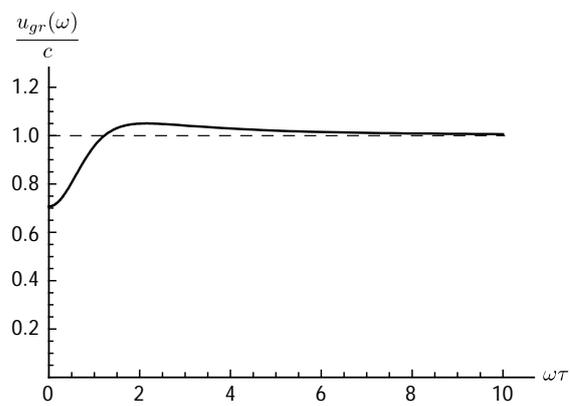


FIGURE 5.1 – Cette figure montre le comportement du rapport de la vitesse de groupe $u_{gr}(\omega)$ à la vitesse de la lumière dans le vide en fonction de la grandeur sans dimension $\omega\tau$. Ce rapport tend vers 1. à haute fréquence. La valeur du paramètre sans dimension χ_0 qui a été adoptée ici est $\chi_0 = 1$.

Chapitre 6

Solutions des exercices du chapitre 6

Exercice 6.1

Etablir le résultat (6.19). Le milieu est homogène, isotrope et conducteur. La permittivité du milieu est exprimée par le symbole ε , la perméabilité magnétique par le symbole μ et la conductivité par le symbole σ .

Solution :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\mathcal{E} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right]$$

$$\check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\check{\mathcal{H}} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right]$$

Dans ces expressions \mathbf{k} , \mathcal{E} et $\check{\mathcal{H}} \in \mathbb{C}^3$. Puisque en milieu homogène et isotrope $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ alors selon la première des équations de Maxwell-Hertz inhomogènes (5.4) où $q(\mathbf{x}, t) \equiv 0$

$$\text{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[i \mathbf{k} \cdot \mathcal{E} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \equiv 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \text{ et } t$$

Par conséquent

$$\mathbf{k} \cdot \mathcal{E} = 0$$

Puisque en milieu homogène, isotrope et conducteur $\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \mu \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$, la seconde des équations de Maxwell-Hertz inhomogènes (5.4) où $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \equiv \sigma \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ est transcrite par

$$\begin{aligned} & \text{rot} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \sigma \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \\ = & \text{Re} \left[\left(i \mathbf{k} \wedge \check{\mathcal{H}} + (i\omega \varepsilon - \sigma) \mathcal{E} \right) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] = \mathbf{0} \quad , \quad \forall \mathbf{x} \text{ et } t \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbf{k} \wedge \check{\mathbf{H}} = -(\omega \varepsilon + i \sigma) \mathcal{E}$$

Puisque en milieu homogène et isotrope $\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \mu \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$ alors, selon la seconde des équations de Maxwell-Hertz homogènes (5.5)

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{rot}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mu \frac{\partial \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ = \operatorname{Re} \left[\left(i \mathbf{k} \wedge \mathcal{E} - i \omega \mu \check{\mathbf{H}} \right) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] = \mathbf{0} \quad , \quad \forall \mathbf{x} \text{ et } t \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbf{k} \wedge \mathcal{E} = \omega \mu \check{\mathbf{H}}$$

Finalement selon la seconde des équations de Maxwell-Hertz homogènes (5.5)

$$\operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left[i \mathbf{k} \cdot \check{\mathbf{H}} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \equiv 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \text{ et } t$$

Par conséquent

$$\mathbf{k} \cdot \check{\mathbf{H}} = 0$$

Exercice 6.2

Soit une onde plane de la forme (6.14) se propageant dans le vide. Discuter les propriétés du vecteur de Poynting correspondant en fonction de la polarisation.

Solution :

Le vecteur de Poynting a pour expression

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \\ &= \mathcal{E}_r \wedge \check{\mathcal{H}}_r (\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t))^2 + \mathcal{E}_i \wedge \check{\mathcal{H}}_i (\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t))^2 \\ &\quad - (\mathcal{E}_r \wedge \check{\mathcal{H}}_i + \mathcal{E}_i \wedge \check{\mathcal{H}}_r) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t) \end{aligned}$$

Ainsi, après groupement des termes on parvient à l'expression

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} (\mathcal{E}_r \wedge \check{\mathcal{H}}_r + \mathcal{E}_i \wedge \check{\mathcal{H}}_i) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathcal{E}_r \wedge \check{\mathcal{H}}_r - \mathcal{E}_i \wedge \check{\mathcal{H}}_i) \cos(2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathcal{E}_r \wedge \check{\mathcal{H}}_i + \mathcal{E}_i \wedge \check{\mathcal{H}}_r) \sin(2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t)) \end{aligned}$$

Il s'agit ensuite de tenir compte des relations (6.13) et du fait que $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_r = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_i = 0$. A l'aide de la formule de Laplace (A.44) on parvient alors à l'expression générale

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mathbf{k}}{\mu_0 \omega(\mathbf{k})} \frac{(\boldsymbol{\mathcal{E}}_r)^2 + (\boldsymbol{\mathcal{E}}_i)^2}{2} \\ &+ \frac{\mathbf{k}}{\mu_0 \omega(\mathbf{k})} \frac{(\boldsymbol{\mathcal{E}}_r)^2 - (\boldsymbol{\mathcal{E}}_i)^2}{2} \cos(2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t)) \\ &- \frac{\mathbf{k}}{\mu_0 \omega(\mathbf{k})} \boldsymbol{\mathcal{E}}_r \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_i \sin(2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t)) \end{aligned}$$

Dans le cas particulier de la **polarisation circulaire** où $\boldsymbol{\mathcal{E}}_r \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_i = 0$ et $\|\boldsymbol{\mathcal{E}}_r\| = \|\boldsymbol{\mathcal{E}}_i\|$ il vient l'expression

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{k}}{\mu_0 \omega(\mathbf{k})} (\boldsymbol{\mathcal{E}}_r)^2$$

Le flux d'énergie est donc constant dans l'espace et dans le temps. Dans le cas particulier de la **polarisation linéaire** on peut supposer sans perte de généralité que $\boldsymbol{\mathcal{E}}_i = \mathbf{0}$ donc

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mathbf{k}}{\mu_0 \omega(\mathbf{k})} (\boldsymbol{\mathcal{E}}_r)^2 \frac{1 + \cos(2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t))}{2} \\ &= \frac{\mathbf{k}}{\mu_0 \omega(\mathbf{k})} (\boldsymbol{\mathcal{E}}_r)^2 (\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k}) t))^2 \end{aligned}$$

Le flux d'énergie est donc "pulsé" au cours du temps avec une fréquence qui est le double de celle de l'onde plane.

Exercice 6.3

Dans le cas général, où les vecteurs \mathbf{k}_0 et $\boldsymbol{\kappa}$ ne sont pas parallèles, discuter les propriétés d'une onde électromagnétique plane de la forme (6.21) se propageant dans un milieu linéaire, isotrope, homogène et conducteur, de constante diélectrique ε , de perméabilité magnétique μ et de résistivité ρ . Quelle est l'allure de la vitesse de phase? Qu'en est-il du vecteur de Poynting?

Solution :

Dans ce problème il s'agit de discuter d'une manière plus approfondie le sujet traité à la sous-section 6.2.3. Les ondes planes sont décrites par des expressions de la forme (6.21) pour le champ électrique et pour le champ magnétique. Les équations de Maxwell-Hertz sont satisfaites si les vecteurs complexes \mathbf{k} , $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ satisfont aux équations (6.22) et (6.23). Si l'on convient de noter \mathbf{k}_0 et $\boldsymbol{\kappa}$ les parties respectivement réelles et imaginaires du vecteur $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^3$ alors ces équations (6.22) et (6.23) sont équivalents aux équations réelles

$$\mathbf{k}_0^2 - \boldsymbol{\kappa}^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{k}_0 \cdot \boldsymbol{\kappa} = \frac{\omega \varepsilon \mu}{2 \tau} \quad \text{où} \quad \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_r + i \mathcal{E}_i \quad \text{et} \quad \check{\mathcal{H}} = \check{\mathcal{H}}_r + i \check{\mathcal{H}}_i$$

$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathcal{E}_r - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathcal{E}_i = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{k}_0 \cdot \mathcal{E}_i + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathcal{E}_r = 0$$

$$\check{\mathcal{H}}_r = \frac{\mathbf{k}_0 \wedge \mathcal{E}_r - \boldsymbol{\kappa} \wedge \mathcal{E}_i}{\omega \mu} \quad \text{et} \quad \check{\mathcal{H}}_i = \frac{\mathbf{k}_0 \wedge \mathcal{E}_i + \boldsymbol{\kappa} \wedge \mathcal{E}_r}{\omega \mu}$$

Adoptons les notations suivantes

$$k_0 = \|\mathbf{k}_0\| \quad , \quad \kappa = \|\boldsymbol{\kappa}\| \quad \text{et} \quad \cos \phi = \frac{\mathbf{k}_0 \cdot \boldsymbol{\kappa}}{\|\mathbf{k}_0\| \|\boldsymbol{\kappa}\|}$$

Il est ensuite aisé de vérifier que

$$\begin{aligned} \frac{k_0^2}{\omega^2} &= \varepsilon \mu \frac{\sqrt{1 + (\omega \tau \cos \phi)^2} + \omega \tau \cos \phi}{2 \omega \tau \cos \phi} \\ \frac{\kappa^2}{\omega^2} &= \varepsilon \mu \frac{\sqrt{1 + (\omega \tau \cos \phi)^2} - \omega \tau \cos \phi}{2 \omega \tau \cos \phi} \end{aligned}$$

Or le rapport ω/k_0 joue le rôle de vitesse de phase (si l'on décide d'ignorer l'influence de l'amortissement). Ainsi, en première approximation

$$v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{\frac{2 \omega \tau \cos \phi}{\sqrt{1 + (\omega \tau \cos \phi)^2} + \omega \tau \cos \phi}}$$

Lorsque la grandeur $\omega \tau \cos \phi$ tend vers zero, donc à basse fréquence ou encore à forte conductivité

$$v_{\text{phase}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{2 \omega \tau \cos \phi} \quad , \quad \omega \tau \cos \phi \ll 1$$

Par contre lorsque $\omega \tau \cos \phi$ tend vers l'infini, donc à haute fréquence ou encore à faible conductivité

$$v_{\text{phase}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad , \quad \omega \tau \cos \phi \gg 1$$

Venons-en maintenant au comportement de la densité d'énergie et à la densité de courant d'énergie en moyenne au cours du temps. On commence par remarquer que la forme générale du vecteur complexe \mathcal{E} qui satisfait aux conditions qui figurent plus haut (en troisième position parmi la liste des conditions à satisfaire) est donnée par les expressions

$$\mathcal{E}_r = \mathbf{k}_0 \wedge \check{\mathbf{a}} - \boldsymbol{\kappa} \wedge \check{\mathbf{b}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_i = \boldsymbol{\kappa} \wedge \check{\mathbf{a}} + \mathbf{k}_0 \wedge \check{\mathbf{b}} \quad \text{où} \quad \check{\mathbf{a}} \text{ et } \check{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$$

Alors, selon (6.21)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= [(\mathbf{k}_0 \wedge \check{\mathbf{a}} - \boldsymbol{\kappa} \wedge \check{\mathbf{b}}) \cos(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega t) \\ &\quad - (\boldsymbol{\kappa} \wedge \check{\mathbf{a}} + \mathbf{k}_0 \wedge \check{\mathbf{b}}) \sin(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \exp(-\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}) \end{aligned}$$

Pour le champ magnétique on a

$$\check{\mathcal{H}}_r = \frac{\mathbf{k}_0 \wedge \boldsymbol{\mathcal{E}}_r - \boldsymbol{\kappa} \wedge \boldsymbol{\mathcal{E}}_i}{\omega \mu} \quad \text{et} \quad \check{\mathcal{H}}_i = \frac{\boldsymbol{\kappa} \wedge \boldsymbol{\mathcal{E}}_r + \mathbf{k}_0 \wedge \boldsymbol{\mathcal{E}}_i}{\omega \mu}$$

Or la densité d'énergie moyenne et le vecteur de Poynting moyen au cours du temps sont donnés par les expressions

$$\bar{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} (\varepsilon \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^* + \mu \check{\mathcal{H}} \cdot \check{\mathcal{H}}^*) \exp(-2 \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x})$$

et

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} (\boldsymbol{\mathcal{E}} \wedge \check{\mathcal{H}}^* + \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \wedge \check{\mathcal{H}}) \exp(-2 \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x})$$

où, comme il est aisé de le constater,

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{H}} \cdot \check{\mathcal{H}}^* &= \frac{(\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\mathcal{E}}) \cdot (\mathbf{k}^* \wedge \boldsymbol{\mathcal{E}}^*)}{\omega^2 \mu^2} = \frac{(\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\mathcal{E}} \wedge (\mathbf{k}^* \wedge \boldsymbol{\mathcal{E}}^*)))}{\omega^2 \mu^2} \\ &= \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}^*)(\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^*) - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^*)(\mathbf{k}^* \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}})}{\omega^2 \mu^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}} \wedge \check{\mathcal{H}}^* + \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \wedge \check{\mathcal{H}} &= \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}} \wedge (\mathbf{k}^* \wedge \boldsymbol{\mathcal{E}}^*) + \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \wedge (\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\mathcal{E}})}{\omega \mu} \\ &= \frac{(\mathbf{k} + \mathbf{k}^*) (\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^*) - (\mathbf{k}^* \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}) \boldsymbol{\mathcal{E}}^* - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^*) \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\omega \mu} \end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0$ on dispose des relations

$$\mathbf{k}^* \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = (\mathbf{k} + \mathbf{k}^*) \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = 2 \mathbf{k}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} \quad \text{et donc} \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^* = 2 \mathbf{k}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^*$$

grâce auxquelles on peut ensuite écrire

$$\varepsilon \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^* + \mu \check{\mathcal{H}} \cdot \check{\mathcal{H}}^* = \varepsilon \left[\left(1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}^*}{\omega^2 \varepsilon \mu}\right) \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^* - 4 \frac{(\mathbf{k}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^*)(\mathbf{k}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}})}{\omega^2 \varepsilon \mu} \right]$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} \wedge \check{\mathcal{H}}^* + \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \wedge \check{\mathcal{H}} = 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\mathbf{k}_0 (\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^*) - (\mathbf{k}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}) \boldsymbol{\mathcal{E}}^* - (\mathbf{k}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^*) \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\omega \sqrt{\varepsilon \mu}}$$

Pour conclure remarquons finalement que

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_0 \cdot \mathcal{E} &= \mathbf{k}_0 \cdot [(\mathbf{k}_0 \wedge \check{\mathbf{a}} - \boldsymbol{\kappa} \wedge \check{\mathbf{b}}) + i(\boldsymbol{\kappa} \wedge \check{\mathbf{a}} + \mathbf{k}_0 \wedge \check{\mathbf{b}})] \\ &= -\mathbf{k}_0 \cdot (\boldsymbol{\kappa} \wedge \check{\mathbf{b}}) + i \mathbf{k}_0 \cdot (\boldsymbol{\kappa} \wedge \check{\mathbf{a}}) \\ &= (\mathbf{k}_0 \wedge \boldsymbol{\kappa}) \cdot (i \check{\mathbf{a}} - \check{\mathbf{b}}) \end{aligned}$$

Dans ces conditions la différence avec la situation dans laquelle les vecteurs réels \mathbf{k}_0 et $\boldsymbol{\kappa}$ sont équipollents se joue sur la valeur nulle de la grandeur $\mathbf{k}_0 \cdot \mathcal{E}$ dans les expressions des grandeurs

$$\varepsilon \mathcal{E} \cdot \mathcal{E}^* + \mu \check{\mathcal{H}} \cdot \check{\mathcal{H}}^* \quad \text{et} \quad \mathcal{E} \wedge \check{\mathcal{H}}^* + \mathcal{E}^* \wedge \check{\mathcal{H}}$$

Exercice 6.4

Soit une "parois" d'épaisseur a faite d'une substance non conductrice au comportement électromagnétique linéaire et qui est homogène et isotrope. La figure 6.1 décrit la situation envisagée.

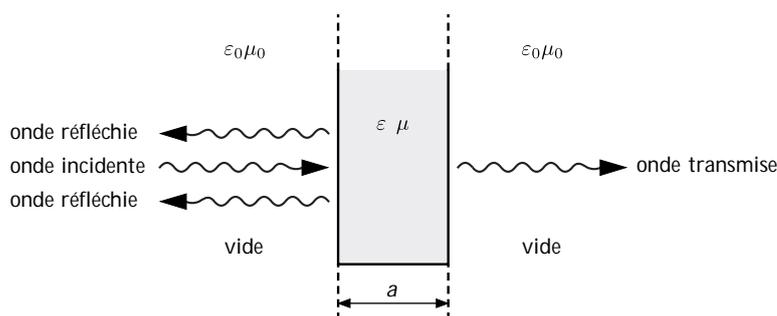


FIGURE 6.1 – Parois d'épaisseur a , non-conductrice et de comportement diélectrique et magnétique linéaire. Une onde électromagnétique incidente perpendiculairement est en partie réfléchie et en partie transmise au delà de cette parois

Une onde électromagnétique plane, monochromatique, de pulsation ω est envoyée perpendiculairement contre cette parois. Calculer le coefficient de réflexion (ou de transmission) de cette parois. Discuter le résultat en fonction de la pulsation ω . Interpréter vos résultats.

Solution :

La démarche qu'on adopte dans le traitement de problème s'inspire de la démarche adoptée dans la sous-section 6.4.1.

Soit $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ et soit $x^1 = -a/2$ et $x^1 = a/2$ les équations des deux surfaces parallèles de séparation du vide et du milieu constituant la parois.

Pour une onde plane incidente de vecteur d'onde $\mathbf{k} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \mathbf{n} = \omega \mathbf{n}/c$ les champs électrique et magnétique s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{x}, t) &= Re \left[\mathcal{E}_{inc} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \quad \text{où } \mathbf{k} \cdot \mathcal{E}_{inc} = 0 \\ \text{et} \\ \check{\mathbf{H}}_{inc}(\mathbf{x}, t) &= Re \left[\check{\mathcal{H}}_{inc} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \quad \text{où } \check{\mathcal{H}}_{inc} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathcal{E}_{inc}}{\omega\mu_0} \end{aligned}$$

Similairement pour une onde plane réfléchie

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ref}(\mathbf{x}, t) &= Re \left[\mathcal{E}_{ref} \exp(i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \quad \text{où } \mathbf{k} \cdot \mathcal{E}_{ref} = 0 \\ \text{et} \\ \check{\mathbf{H}}_{ref}(\mathbf{x}, t) &= Re \left[\check{\mathcal{H}}_{ref} \exp(i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \quad \text{où } \check{\mathcal{H}}_{ref} = \frac{-\mathbf{k} \wedge \mathcal{E}_{ref}}{\omega\mu_0} \end{aligned}$$

Pour une onde plane, de même pulsation, au sein de la paroi le vecteur d'onde correspondant s'écrit $\mathbf{k}' = \omega \sqrt{\varepsilon\mu} \mathbf{n}$ et cette onde est décrite par des champs électrique et magnétique de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{parois}(\mathbf{x}, t) &= Re \left[\mathcal{E}_+ \exp(i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega t)) + \mathcal{E}_- \exp(i(-\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \\ \text{où } \quad \mathbf{k}' \cdot \mathcal{E}_+ &= \mathbf{k}' \cdot \mathcal{E}_- = 0 \\ \text{et} \\ \check{\mathbf{H}}_{parois}(\mathbf{x}, t) &= Re \left[\check{\mathcal{H}}_+ \exp(i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega t)) + \check{\mathcal{H}}_- \exp(i(-\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \\ \text{où } , \text{ respectivement } \quad \check{\mathcal{H}}_{\pm} &= \frac{\pm \mathbf{k}' \wedge \mathcal{E}_{\pm}}{\omega\mu_0} \end{aligned}$$

Enfin une onde plane transmise de vecteur d'onde \mathbf{k} est décrite par les champs électrique et magnétique que voici

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{trans}(\mathbf{x}, t) &= Re \left[\mathcal{E}_{trans} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \quad \text{où } \mathbf{k} \cdot \mathcal{E}_{trans} = 0 \\ \text{et} \\ \check{\mathbf{H}}_{trans}(\mathbf{x}, t) &= Re \left[\check{\mathcal{H}}_{trans} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \quad \text{où } \check{\mathcal{H}}_{trans} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathcal{E}_{trans}}{\omega\mu_0} \end{aligned}$$

Ces choix formels préliminaires faits considérons les conditions aux limites à satisfaire sur la surface $x^1 = -a/2$. Les champs électrique et magnétique tangent à la surface de séparation des milieux sont continus à chaque instant. Pour la suite il est commode de poser $k = \|\mathbf{k}\| = \omega/c$ et $k' = \|\mathbf{k}'\| = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. Avec ces conventions d'écriture il vient

$$\mathcal{E}_{inc} \exp\left(\frac{-ika}{2}\right) + \mathcal{E}_{ref} \exp\left(\frac{+ika}{2}\right) = \mathcal{E}_+ \exp\left(\frac{-ik'a}{2}\right) + \mathcal{E}_- \exp\left(\frac{+ik'a}{2}\right)$$

et

$$\check{\mathcal{H}}_{inc} \exp\left(\frac{-ika}{2}\right) + \check{\mathcal{H}}_{ref} \exp\left(\frac{+ika}{2}\right) = \check{\mathcal{H}}_+ \exp\left(\frac{-ik'a}{2}\right) + \check{\mathcal{H}}_- \exp\left(\frac{+ik'a}{2}\right)$$

Compte tenu de la loi d'induction de Faraday cette dernière équation peut alors aussi s'écrire

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{k} \wedge \mathcal{E}_{inc}}{\omega\mu_0} \exp\left(\frac{-ika}{2}\right) - \frac{\mathbf{k} \wedge \mathcal{E}_{ref}}{\omega\mu_0} \exp\left(\frac{+ika}{2}\right) \\ = & \frac{\mathbf{k}' \wedge \mathcal{E}_+}{\omega\mu} \exp\left(\frac{-ik'a}{2}\right) - \frac{\mathbf{k}' \wedge \mathcal{E}_-}{\omega\mu} \exp\left(\frac{+ik'a}{2}\right) \end{aligned}$$

Ensuite, après l'opération du produit vectoriel $\mathbf{k} \wedge \dots$ portant sur les deux membres de l'équation précédente et compte tenu de la formule de Laplace on obtient l'équation

$$\begin{aligned} & -\frac{k^2 \mathcal{E}_{inc}}{\omega\mu_0} \exp\left(\frac{-ika}{2}\right) + \frac{k^2 \mathcal{E}_{ref}}{\omega\mu_0} \exp\left(\frac{+ika}{2}\right) \\ = & -\frac{kk' \mathcal{E}_+}{\omega\mu} \exp\left(\frac{-ik'a}{2}\right) + \frac{kk' \mathcal{E}_-}{\omega\mu} \exp\left(\frac{+ik'a}{2}\right) \end{aligned}$$

et après une dernière manipulation formelle élémentaire on parvient à la relation

$$\begin{aligned} & \frac{\mu k}{\mu_0 k'} \left(\mathcal{E}_{inc} \exp\left(\frac{-ika}{2}\right) - \mathcal{E}_{ref} \exp\left(\frac{+ika}{2}\right) \right) \\ = & \mathcal{E}_+ \exp\left(\frac{-ik'a}{2}\right) - \mathcal{E}_- \exp\left(\frac{+ik'a}{2}\right) \end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture posons

$$\frac{\mu k}{\mu_0 k'} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu}{\varepsilon \mu_0}} = A$$

De la dernière égalité ci-dessus et de la première des égalités écrites plus haut pour le champ électrique constituent un système d'équations linéaires à 2 inconnues pour les vecteurs \mathcal{E}_+ et \mathcal{E}_- . La résolution de ce système conduit aux deux expressions que voici.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_+ &= \frac{1+A}{2} \exp\left(\frac{-i(k-k')a}{2}\right) \mathcal{E}_{inc} + \frac{1-A}{2} \exp\left(\frac{+i(k+k')a}{2}\right) \mathcal{E}_{ref} \\ \mathcal{E}_- &= \frac{1-A}{2} \exp\left(\frac{-i(k+k')a}{2}\right) \mathcal{E}_{inc} + \frac{1+A}{2} \exp\left(\frac{+i(k-k')a}{2}\right) \mathcal{E}_{ref} \end{aligned}$$

Venons-en maintenant aux conditions aux limites sur la surface $x^1 = +a/2$. Les champs électrique et magnétique tangent à la surface de séparation des milieux sont continus à chaque instant. Par conséquent

$$\mathcal{E}_{trans} \exp\left(\frac{+ika}{2}\right) = \mathcal{E}_+ \exp\left(\frac{ik'a}{2}\right) + \mathcal{E}_- \exp\left(\frac{-ik'a}{2}\right)$$

et

$$\check{\mathcal{H}}_{trans} \exp\left(\frac{+ika}{2}\right) = \check{\mathcal{H}}_+ \exp\left(\frac{+ik'a}{2}\right) + \check{\mathcal{H}}_- \exp\left(\frac{-ik'a}{2}\right)$$

Compte tenu de la loi d'induction de Faraday cette dernière équation peut alors aussi s'écrire

$$\frac{\mathbf{k} \wedge \mathcal{E}_{trans}}{\omega\mu_0} \exp\left(\frac{+ika}{2}\right) = \frac{\mathbf{k}' \wedge \mathcal{E}_+}{\omega\mu} \exp\left(\frac{+ik'a}{2}\right) - \frac{\mathbf{k}' \wedge \mathcal{E}_-}{\omega\mu} \exp\left(\frac{-ik'a}{2}\right)$$

Ensuite, après l'opération du produit vectoriel $\mathbf{k} \wedge \dots$ portant sur les deux membres de l'équation précédente et compte tenu de la formule de Laplace on obtient l'équation

$$-\frac{k^2 \mathcal{E}_{trans}}{\omega\mu_0} \exp\left(\frac{+ika}{2}\right) = -\frac{kk' \mathcal{E}_+}{\omega\mu} \exp\left(\frac{+ik'a}{2}\right) + \frac{kk' \mathcal{E}_-}{\omega\mu} \exp\left(\frac{-ik'a}{2}\right)$$

qui après simplification peut s'écrire

$$A \mathcal{E}_{trans} \exp\left(\frac{+ika}{2}\right) = \mathcal{E}_+ \exp\left(\frac{+ik'a}{2}\right) - \mathcal{E}_- \exp\left(\frac{-ik'a}{2}\right)$$

De la dernière égalité ci-dessus et de la première des égalités écrites plus haut pour le champ électrique constituent un système d'équations linéaires à 2 inconnues pour les vecteurs \mathcal{E}_+ et \mathcal{E}_- . La résolution de ce système conduit aux deux expressions que voici.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_+ &= \frac{1+A}{2} \exp\left(\frac{+i(k-k')a}{2}\right) \mathcal{E}_{trans} \\ \mathcal{E}_- &= \frac{1-A}{2} \exp\left(\frac{+i(k+k')a}{2}\right) \mathcal{E}_{trans} \end{aligned}$$

Finalement, après remplacement de \mathcal{E}_+ et \mathcal{E}_- par ces deux dernières expressions dans les deux relations qui résultent des conditions aux limites en $x^1 = -a/2$, on obtient les deux équations que voici :

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{inc} \exp\left(\frac{-ika}{2}\right) + \mathcal{E}_{ref} \exp\left(\frac{+ika}{2}\right) \\ &= \mathcal{E}_{trans} \exp\left(\frac{+ika}{2}\right) (\cos(k'a) - iA \sin(k'a)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &A \left(\mathcal{E}_{inc} \exp\left(\frac{-ika}{2}\right) - \mathcal{E}_{ref} \exp\left(\frac{+ika}{2}\right) \right) \\ &= \mathcal{E}_{trans} \exp\left(\frac{+ika}{2}\right) (-i \sin(k'a) + A \cos(k'a)) \end{aligned}$$

à partir desquelles il est facile de déduire les expressions suivantes de \mathcal{E}_{trans} et \mathcal{E}_{ref} en fonction de \mathcal{E}_{inc}

$$\mathcal{E}_{trans} = \frac{\exp(-ika) \mathcal{E}_{inc}}{\cos(k'a) - iB \sin(k'a)} \quad \text{où} \quad B = \frac{1 + A^2}{2A} \geq 1$$

et

$$\mathcal{E}_{ref} = \frac{iC \sin(k'a) \exp(-ika) \mathcal{E}_{inc}}{\cos(k'a) - iB \sin(k'a)} \quad \text{où} \quad C = \frac{1 - A^2}{2A} = \sqrt{B^2 - 1}$$

Rappelons qu'en fait ce sont les grandeurs

$$\exp(+ika/2) \mathcal{E}_{trans} \quad , \quad \exp(+ika/2) \mathcal{E}_{ref} \quad < \quad \exp(-ika/2) \mathcal{E}_{inc}$$

qui sont directement liées à la valeur du champ électrique transmis sur la surface $x^1 = a/2$, puis la valeur du champ électrique réfléchi et incident sur la surface $x^1 = -a/2$.

Déterminons maintenant les vecteurs de Poynting moyens sur ces deux surfaces. Partant de la formule (6.9), pour l'onde incidente il vient

$$\bar{\mathcal{S}}_{inc} = \frac{c^2 \mathbf{k}}{\omega} \frac{\varepsilon_0 \|\mathcal{E}_{inc}\|^2}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mathcal{E}_{inc} \cdot \mathcal{E}_{inc}^*}{2} \mathbf{n}$$

Pour l'onde transmise,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{S}}_{trans} &= \frac{c^2 \mathbf{k}}{\omega} \frac{\varepsilon_0 \|\mathcal{E}_{trans}\|^2}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mathcal{E}_{trans} \cdot \mathcal{E}_{trans}^*}{2} \mathbf{n} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} T(\omega) \frac{\mathcal{E}_{inc} \cdot \mathcal{E}_{inc}^*}{2} \mathbf{n} \end{aligned}$$

Par conséquent le coefficient de transmission $T(\omega)$ s'écrit

$$\begin{aligned} T(\omega) &= \left| \frac{1}{\cos(k'a) - iB \sin(k'a)} \right|^2 = \frac{1}{\cos(k'a)^2 + B^2 \sin(k'a)^2} \\ &= \frac{1}{\cos(\omega \sqrt{\varepsilon \mu} a)^2 + B^2 \sin(\omega \sqrt{\varepsilon \mu} a)^2} \end{aligned}$$

Pour l'onde réfléchie

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{S}}_{ref} &= \frac{-c^2 \mathbf{k}}{\omega} \frac{\varepsilon_0 \|\mathcal{E}_{ref}\|^2}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mathcal{E}_{ref} \cdot \mathcal{E}_{ref}^*}{2} (-\mathbf{n}) \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} R(\omega) \frac{\mathcal{E}_{inc} \cdot \mathcal{E}_{inc}^*}{2} (-\mathbf{n}) \end{aligned}$$

Le coefficient de réflexion $R(\omega)$ a donc pour expression,

$$\begin{aligned}
R(\omega) &= \left| \frac{iC \sin(k'a)}{\cos(k'a) - iB \sin(k'a)} \right|^2 = \frac{C^2 \sin(k'a)^2}{\cos(k'a)^2 + B^2 \sin(k'a)^2} \\
&= \frac{C^2 \sin(a\omega\sqrt{\varepsilon\mu})^2}{\cos(\omega\sqrt{\varepsilon\mu} a)^2 + B^2 \sin(\omega\sqrt{\varepsilon\mu} a)^2}
\end{aligned}$$

Il est alors aisé de constater que

$$T(\omega) + R(\omega) = 1$$

En conclusion, la transmission est maximale si l'épaisseur a est un nombre entier de demi longueur d'onde, autrement dit si $a = j(\lambda/2)$, $j = 0, 1, \dots$ où $\lambda = 2\pi/\sqrt{\varepsilon\mu}\omega$. En revanche la transmission minimale si cette épaisseur est un nombre impaire de quart de longueur d'onde, autrement dit si $a = (2j - 1)(\lambda/4)$, $j = 1, 2, \dots$

Exercice 6.5

Une onde électromagnétique plane monochromatique, de pulsation ω , est envoyée perpendiculairement à la surface d'un milieu conducteur, linéaire, isotrope et homogène, semi-infini. La figure 6.2 décrit la situation envisagée.

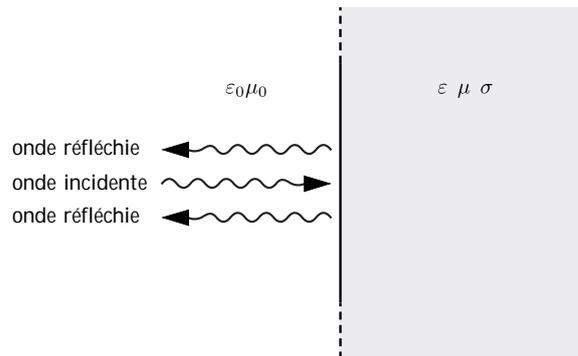


FIGURE 6.2 – Onde plane incidente perpendiculairement à la surface d'un milieu conducteur semi-infini. Une partie de l'onde est réfléchie et l'autre est absorbée.

A l'aide des formules générales de la sous-section 6.4.2 et 6.4.3 exprimer le coefficient de réflexion (ou de transmission) associé à cette situation. Discuter le comportement de ces coefficients en fonction de la pulsation ω . Pénétration de l'onde dans le milieu conducteur.

Solution :

Il faut ici se référer aux sous-sections 6.4.2 et 6.4.3.

Soit $x^1 = 0$ la surfaces de séparation du vide et du milieu conducteur et soit $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ un vecteur unité orthogonal à cette surface de séparation.

Pour l'onde plane incidente $\mathbf{k} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \mathbf{n} = \omega \mathbf{n}/c$. Les champs électrique et magnétique correspondants s'écrivent

$$\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\mathcal{E}_{inc} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \quad \text{où} \quad \mathbf{k} \cdot \mathcal{E}_{inc} = 0$$

et

$$\check{\mathbf{H}}_{inc}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\check{\mathcal{H}}_{inc} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \quad \text{où} \quad \check{\mathcal{H}}_{inc} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathcal{E}_{inc}}{\omega \mu_0}$$

Pour l'onde plane réfléchie ces mêmes champs s'écrivent

$$\mathbf{E}_{ref}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\mathcal{E}_{ref} \exp(i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \quad \text{où} \quad \mathbf{k} \cdot \mathcal{E}_{ref} = 0$$

et

$$\check{\mathbf{H}}_{ref}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\check{\mathcal{H}}_{ref} \exp(i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \quad \text{où} \quad \check{\mathcal{H}}_{ref} = \frac{-\mathbf{k} \wedge \mathcal{E}_{ref}}{\omega \mu_0}$$

Le "vecteur d'onde" \mathbf{k}' de l'onde plane transmise est complexe. Posons

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}'_0 + i \boldsymbol{\kappa}' \quad \text{où} \quad \mathbf{k}'_0 = k'_0 \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\kappa}' = \kappa' \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$$

Or les équations de Maxwell-Hertz imposent à ce vecteur d'onde de satisfaire à la condition

$$(\mathbf{k}')^2 = \omega^2 \varepsilon' \mu' \left(1 + \frac{i}{\omega \tau'} \right) \quad \text{où} \quad \tau' = \frac{\varepsilon'}{\sigma'} = \varepsilon' \rho'$$

Autrement dit

$$(k'_0)^2 - (\kappa')^2 = \omega^2 \varepsilon' \mu' \quad \text{et} \quad k'_0 \kappa' = \frac{\omega^2 \varepsilon' \mu'}{2 \omega \tau'}$$

et par conséquent

$$\frac{(k'_0)^2}{\omega^2 \varepsilon' \mu'} = \frac{1}{2 \omega \tau'} \left(\sqrt{1 + (\omega \tau')^2} + \omega \tau' \right)$$

et

$$\frac{(\kappa')^2}{\omega^2 \varepsilon' \mu'} = \frac{1}{2 \omega \tau'} \left(\sqrt{1 + (\omega \tau')^2} - \omega \tau' \right)$$

Remarques : Lorsque ω varie de 0 à ∞ , k'_0 varie de 0 (comme $O(\sqrt{\omega})$) à $+\infty$ (comme $O(\omega)$) et κ' varie de 0 (comme $O(\sqrt{\omega})$) à $\kappa_\infty = \sqrt{\varepsilon' \mu'}/2\tau'$.

Pour l'onde plane transmise les champs électrique et magnétique correspondants s'écrivent

$$\mathbf{E}_{trans}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\mathcal{E}_{trans} \exp(i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \quad \text{où} \quad \mathbf{k}' \cdot \mathcal{E}_{trans} = 0$$

et

$$\check{\mathbf{H}}_{trans}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\check{\mathcal{H}}_{trans} \exp(i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega t)) \right] \quad \text{où} \quad \check{\mathcal{H}}_{trans} = \frac{\mathbf{k}' \wedge \mathcal{E}_{trans}}{\omega \mu'}$$

Venons-en maintenant aux conditions aux limites sur la surface $x^1 = 0$. Les champs électrique et magnétique tangents à la surface de séparation des milieux sont continus à chaque instant. Elles s'écrivent

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{inc} + \mathcal{E}_{ref} &= \mathcal{E}_{trans} \\ \text{et} \\ \check{\mathcal{H}}_{inc} + \check{\mathcal{H}}_{ref} &= \check{\mathcal{H}}_{trans}\end{aligned}$$

Mais, compte tenu de la loi d'induction de Faraday la dernière des équations qui précèdent peut aussi s'écrire

$$\frac{\mathbf{k} \wedge \mathcal{E}_{inc}}{\omega\mu_0} - \frac{\mathbf{k} \wedge \mathcal{E}_{ref}}{\omega\mu_0} = \frac{\mathbf{k}' \wedge \mathcal{E}_{trans}}{\omega\mu'}$$

Pour la suite il est commode d'adopter les conventions d'écriture suivantes. Notons $k = \|\mathbf{k}\| = \omega/c$ et $k' = k'_0 + i\kappa'$. Effectuons maintenant l'opération du produit vectoriel $\mathbf{k} \wedge \dots$ sur les deux membres de l'équation précède. Compte tenu de la formule de Laplace on parvient ainsi à l'égalité

$$-\frac{k^2 \mathcal{E}_{inc}}{\omega\mu_0} + \frac{k^2 \mathcal{E}_{ref}}{\omega\mu_0} = -\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \mathcal{E}_{trans}}{\omega\mu'}$$

car il découle des conditions aux limites que $\mathbf{k} \cdot \mathcal{E}_{trans} = \mathbf{k} \cdot \mathcal{E}_{inc} + \mathbf{k} \cdot \mathcal{E}_{ref} = 0$. L'équation qui précède peut être retranscrite sous la forme suivante

$$A (\mathcal{E}_{inc} - \mathcal{E}_{ref}) = \mathcal{E}_{trans} \quad \text{où} \quad A = \frac{\mu' k}{\mu_0 k'}$$

Il est ensuite aisé de déduire de la définition de la grandeur complexe A que le module et l'argument de cette dernière grandeur sont donnés par les expressions que voici

$$\begin{aligned}AA^* &= \left(\frac{\mu'}{\mu_0}\right)^2 \left|\frac{k}{k'}\right|^2 = \frac{\mu'\varepsilon_0}{\mu_0\varepsilon'} \frac{\omega\tau'}{\sqrt{1+(\omega\tau')^2}} \\ \text{et} \\ \exp(4i \arg A) &= \left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \left(\frac{(k')^*}{k'}\right)^2 = \frac{1-i/\omega\tau'}{1+i/\omega\tau'}\end{aligned}$$

De ces dernières expressions on peut alors déduire l'expression suivante

$$\tan(2 \arg A) = \frac{-1}{\omega\tau'} \quad \text{donc} \quad \tan(\arg A) = \omega\tau' - \sqrt{(\omega\tau')^2 + 1}$$

Donc

$$\cos(\arg A) = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan(\arg A))^2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega\tau'}{\sqrt{1+(\omega\tau')^2}}\right)}$$

A partir des équations précédentes, qui imposent la continuité des champs électrique et magnétique tangents à la surface de séparation des deux milieux, on peut finalement déduire les expressions suivantes des grandeurs \mathcal{E}_{ref} et \mathcal{E}_{trans} . Elles s'écrivent

$$\mathcal{E}_{ref} = \frac{A-1}{A+1} \mathcal{E}_{inc} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{trans} = \frac{2A}{A+1} \mathcal{E}_{inc}$$

Venons-en à la détermination des vecteur de Poynting associés à ces ondes. Pour l'onde incidente

$$\bar{\mathbf{S}}_{inc} = \frac{c^2 \mathbf{k}}{\omega} \frac{\varepsilon_0 \|\mathcal{E}_{inc}\|}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mathcal{E}_{inc} \cdot \mathcal{E}_{inc}^*}{2} \mathbf{n}$$

Pour l'onde réfléchie

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_{ref} &= \frac{-c^2 \mathbf{k}}{\omega} \frac{\varepsilon_0 \|\mathcal{E}_{ref}\|}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mathcal{E}_{ref} \cdot \mathcal{E}_{ref}^*}{2} (-\mathbf{n}) \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} R(\omega) \frac{\mathcal{E}_{inc} \cdot \mathcal{E}_{inc}^*}{2} (-\mathbf{n}) \end{aligned}$$

De cette dernière expression on peut donc déduire que le coefficient de réflexion $R(\omega)$ s'écrit

$$R(\omega) = \left| \frac{A-1}{A+1} \right|^2 = \frac{AA^* - A - A^* + 1}{AA^* + A + A^* + 1} = \frac{1-B}{1+B}$$

où

$$B = \frac{A + A^*}{1 + AA^*} = \frac{2|A| \cos \arg A}{1 + |A|^2} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu'}{\mu_0 \varepsilon'}} \frac{\sqrt{C(1+C)}}{1 + \frac{\varepsilon_0 \mu'}{\mu_0 \varepsilon'} C}$$

et où

$$C = \frac{\omega \tau'}{\sqrt{1 + (\omega \tau')^2}}$$

On remarquera que la grandeur C varie de 0 à 1 lorsque $\omega \tau'$ varie de 0 à $+\infty$. Rappelons que pour un matériau isolant $\tau' = \infty$ et pour un matériau parfaitement conducteur $\tau' = 0$. Notons encore que la grandeur B varie de 0 à B_{max} où

$$B_{max} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_0 \mu' / \mu_0 \varepsilon'}}{1 + \varepsilon_0 \mu' / \mu_0 \varepsilon'}$$

lorsque $\omega \tau'$ varie de 0 à $+\infty$. Notons enfin que, dans les mêmes conditions, le coefficient $R(\omega)$ varie de 1 à R_{min} où

$$R_{min} = \frac{1 - B_{max}}{1 + B_{max}} = \left(\frac{1 - \sqrt{\varepsilon_0 \mu' / \mu_0 \varepsilon'}}{1 + \sqrt{\varepsilon_0 \mu' / \mu_0 \varepsilon'}} \right)^2$$

Finalement, pour l'onde transmise le vecteur de Poynting sur la surface de séparation des deux milieu s'écrit,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{S}}_{trans} &= \frac{k'_0}{2\omega\mu'} \|\mathbf{E}_{trans}\|^2 \\
&= \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+(\omega\tau')^2} + \omega\tau'}{2\omega\tau'}} \frac{\mathbf{E}_{trans} \cdot \mathbf{E}_{trans}^*}{2} \mathbf{n} \\
&= \sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon'}{\varepsilon_0\mu'}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+(\omega\tau')^2} + \omega\tau'}{2\omega\tau'}} \left| \frac{2A}{1+A} \right|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mathbf{E}_{inc} \cdot \mathbf{E}_{inc}^*}{2} \mathbf{n} \\
&= T(\omega) \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mathbf{E}_{inc} \cdot \mathbf{E}_{inc}^*}{2} \mathbf{n}
\end{aligned}$$

Donc le coefficient de transmission $T(\omega)$ a pour expression

$$\begin{aligned}
T(\omega) &= \sqrt{\frac{\varepsilon'\mu_0}{\varepsilon_0\mu'}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+(\omega\tau')^2} + \omega\tau'}{2\omega\tau'}} \frac{4AA^*}{1+A+A^*+AA^*} \\
&= \sqrt{\frac{\varepsilon'\mu_0}{\varepsilon_0\mu'}} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1+C}{C} \frac{4|A|^2}{1+|A|^2} \frac{1}{1+B}} \\
&= \sqrt{\frac{\varepsilon'\mu_0}{\varepsilon_0\mu'}} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{4(\mu'\varepsilon_0/\mu_0\varepsilon') C}{1+(\mu'\varepsilon_0/\mu_0\varepsilon') C} \frac{1+C}{C} \frac{1}{1+B}} = \frac{2B}{1+B}
\end{aligned}$$

Il est alors aisé de constater qu'on a bien l'égalité

$$R(\omega) + T(\omega) = 1$$

Evaluons enfin la pénétration de l'onde dans le milieu matériel. Cette pénétration est fournie par le coefficient d'atténuation

$$\kappa' = \omega \sqrt{\varepsilon'\mu'} \sqrt{\frac{\sqrt{1+(\omega\tau')^2} - \omega\tau'}{2\omega\tau'}}$$

Plus précisément la profondeur de pénétration est donnée par la formule

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{1}{\kappa'} = \frac{1}{\omega \sqrt{\varepsilon'\mu'}} \sqrt{\frac{2\omega\tau'}{\sqrt{1+(\omega\tau')^2} - \omega\tau'}} \\
&= \frac{2\tau'}{\sqrt{\varepsilon'\mu'}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+(\omega\tau')^2} + \omega\tau'}{2\omega\tau'}}
\end{aligned}$$

A haute fréquence la profondeur de pénétration tend donc vers la valeur limite $\delta = 2\tau'/\sqrt{\varepsilon'\mu'}$.

Exercice 6.6

Déterminer et discuter la vitesse de phase et la vitesse de groupe des modes $TE(0, n)$ et $TM(0, n)$ dans un guide d'onde cylindrique creux de rayon a . Le milieu est le vide et le guide d'onde est constitué d'un conducteur parfait.

Solution :

Exercice relatif à la sous-section 6.5.2

On se place en coordonnées cylindriques. Considérons d'abord les mode $TE(0, n)$. Selon (6.145) les seules composantes non-nulles du champ électrique et du champ magnétique des modes $TE(0)$ sont

$$\begin{aligned} E_\phi(\rho, \phi, z) &= \frac{du(\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z) \\ \check{H}_\rho(\rho, \phi, z) &= -\frac{\kappa}{\omega\mu_0} \frac{du(\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z) \\ \check{H}_z(\rho, \phi, z) &= \frac{i k^2}{\omega\mu_0} u(\rho) \exp(i\kappa z) \end{aligned}$$

où

$$k = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \kappa^2} \quad \text{et} \quad u(\rho) = u_0 J_0(k\rho)$$

Les conditions aux limites pour un guide d'onde cylindrique creux de rayon a sont

$$E_\phi(a, \phi, z) = E_z(a, \phi, z) = 0 \quad \text{et} \quad \check{H}_\rho(a, \phi, z) = 0$$

Ces dernières conditions aux limites sont satisfaites si et seulement si la fonction radiale

$$\frac{du(\rho)}{d\rho} = u_0 k \left. \frac{dJ_0(x)}{dx} \right|_{x=k\rho}$$

s'annule lorsque $\rho = ka$. Par conséquent, il faut que

$$\left. \frac{dJ_0(x)}{dx} \right|_{x=ka} = 0 \quad \Rightarrow \quad ka = z'_{0n}$$

où le symbole z'_{0n} désigne le n -ième zéro positif de la dérivée de la fonction de Bessel $J_0(x)$. Ainsi, pour le mode $TE(0, n)$, $n = 1, 2, \dots$

$$\kappa = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{z'_{0n}}{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{z'_{0n}}{a}\right)^2}$$

et par conséquent la vitesse de phase de la propagation de l'onde selon l'axe Oz vaut

$$u_{phase} = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{\omega}{\sqrt{(\omega^2/c)^2 - (z'_{0n}/a)^2}} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - (\omega'_{0n})^2}} > c$$

où la grandeur $\omega'_{0n} = cz'_{0n}/a$ tient lieu de pulsation de coupure du mode $TE(0, n)$.

Ensuite, inversement, la pulsation de l'onde en fonction du vecteur d'onde κ s'écrit

$$\omega = c \sqrt{\kappa^2 + \left(\frac{z'_{0n}}{a}\right)^2} = c \sqrt{\kappa^2 + \left(\frac{\omega'_{0n}}{c}\right)^2}$$

et par conséquent la vitesse de groupe a pour expression

$$u_{groupe} = \frac{d\omega}{d\kappa} = c \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + (\omega'_{0n}/c)^2}} = c^2 \frac{\kappa}{\omega}$$

On constate ainsi que

$$u_{groupe} u_{phase} = c^2 \quad \text{et donc que} \quad u_{groupe} < c$$

Considérons ensuite les mode $TM(0, n)$. Selon (6.146) les seules composantes non-nulles du champ électrique et du champ magnétique des modes $TE(0)$ sont

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho, \phi, z) &= \frac{i\kappa}{\omega\varepsilon_0} \frac{du(\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z) \\ E_z(\rho, \phi, z) &= \frac{-ik^2}{\omega\varepsilon_0} u(\rho) \exp(i\kappa z) \\ \check{H}_\phi(\rho, \phi, z) &= \frac{du(\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z) \end{aligned}$$

où

$$u(\rho) = u_0 J_0(k\rho) \quad \text{et} \quad k = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \kappa^2}$$

Les conditions aux limites pour un guide d'onde cylindrique creux de rayon a sont

$$E_\phi(a, \phi, z) = E_z(a, \phi, z) = 0 \quad \text{et} \quad \check{H}_\rho(a, \phi, z) = 0$$

Ces dernières conditions aux limites sont satisfaites si et seulement si la fonction radiale

$$u(\rho) = u_0 k J_0(x)|_{x=k\rho}$$

s'annule lorsque $\rho = ka$. Il faut donc que

$$J_0(ka) = 0 \quad \Rightarrow \quad ka = z_{0n}$$

où le symbole z_{0n} désigne le n -ième zéro positif de la fonction de Bessel $J_0(x)$. Ainsi, pour le mode $TM(0, n)$, $n = 1, 2, \dots$

$$\kappa = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{z_{0n}}{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{z_{0n}}{a}\right)^2}$$

et par conséquent la vitesse de phase de la propagation de l'onde selon l'axe Oz vaut

$$u_{phase} = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{\omega}{\sqrt{(\omega/c)^2 - (z_{0n}/a)^2}} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - (\omega_{0n})^2}} > c$$

où le symbole $\omega_{0n} = cz_{0n}/a$ désigne la pulsation de coupure du mode $TM(0, n)$. Ensuite, inversement, la pulsation de l'onde en fonction du vecteur d'onde κ s'écrit

$$\omega = c \sqrt{\kappa^2 + \left(\frac{z_{0n}}{a}\right)^2} = c \sqrt{\kappa^2 + \left(\frac{\omega_{0n}}{c}\right)^2}$$

Par conséquent

$$u_{groupe} = \frac{d\omega}{d\kappa} = c \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + (\omega_{0n}/c)^2}} = c^2 \frac{\kappa}{\omega}$$

Ainsi

$$u_{groupe} u_{phase} = c^2 \quad \text{et donc} \quad u_{groupe} < c$$

Exercice 6.7

Déterminer les modes du type $TE(0)$ (6.145) et $TM(0)$ (6.146) d'un guide d'onde cylindrique, de rayon a , dont l'intérieur est un milieu assimilable au vide et dont le matériau qui en constitue l'enceinte extérieure présente une constante diélectrique ε' , une perméabilité magnétique μ' et une conductivité σ' finie, mais très grande, c'est à dire telle que

$$\omega\tau' \ll \inf \left\{ 1, \frac{n'^2}{n^2} \right\} \quad \text{où} \quad \tau' = \frac{\varepsilon'}{\sigma'}$$

On supposera en outre que

$$|k'| a \gg 1 \quad \text{où} \quad k' = \sqrt{i\omega\mu'(\sigma' - i\omega\varepsilon') - (\kappa')^2}$$

La figure 6.3 illustre la situation envisagée.

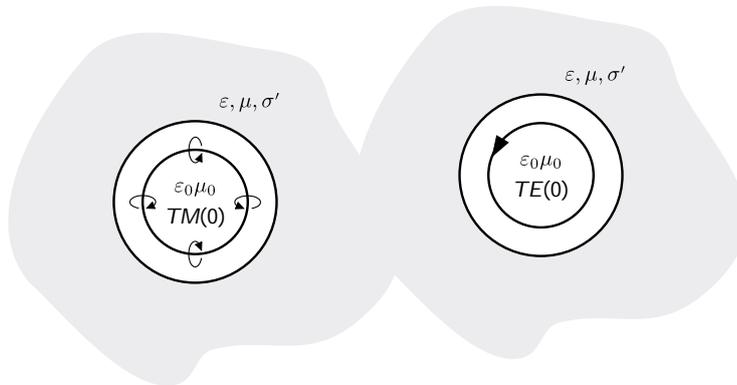


FIGURE 6.3 – Guide d’onde cylindrique formé d’une cavité assimilable au vide au sein d’un milieu linéaire de conductivité finie

Discuter ces hypothèses restrictives faites. Traiter le problème de manière approchée, c’est-à-dire de manière perturbative par rapport à la grandeur $1/\sigma'$.

Solution :

L’exercice est relatif aux sous-sections 6.5.2 et 6.5.3.

On se place en coordonnées cylindriques. Considérons d’abord les mode $TE(0, n)$. Selon (6.145) les seules composantes non-nulles du champ électrique et du champ magnétique des modes $TE(0)$ sont :

A l’intérieur du guide d’onde cylindrique $\rho < a$:

$$\begin{aligned} E_\phi(\rho, \phi, z) &= \frac{du(\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z) \\ \check{H}_\rho(\rho, \phi, z) &= -\frac{\kappa}{\omega\mu_0} \frac{du(\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z) \\ \check{H}_z(\rho, \phi, z) &= \frac{i k^2}{\omega\mu_0} u(\rho) \exp(i\kappa z) \end{aligned}$$

où

$$k = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \kappa^2} \quad \text{et} \quad u(\rho) = u_0 J_0(k\rho)$$

A l’extérieur du guide d’onde cylindrique $\rho \geq a$:

$$\begin{aligned} E'_\phi(\rho, \phi, z) &= \frac{du'(\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa' z) \\ \check{H}'_\rho(\rho, \phi, z) &= -\frac{\kappa'}{\omega\mu'} \frac{du'(\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa' z) \\ \check{H}'_z(\rho, \phi, z) &= \frac{i (k')^2}{\omega\mu'} u'(\rho) \exp(i\kappa' z) \end{aligned}$$

où

$$k' = \sqrt{i\omega\mu'(\sigma' - i\omega\varepsilon') - (\kappa')^2} \quad \text{et} \quad u'(\rho) = u_0 A H_0^1(k'\rho)$$

Il est ici utile de consulter le très bref annexe H. Le symbole $H_0^1(x)$ désigne la fonction de Bessel de troisième espèce (voir (H.7) et (H.9)). La fonction de Bessel de quatrième espèce n'intervient pas car elle décrirait une onde électromagnétique radialement "entrante" dans le câble. La fonction de Bessel de troisième espèce qui intervient ici décrit une onde électromagnétique radialement "sortante" émise par le câble.

Après ce bref rappel venons-en aux points essentiels. Les conditions aux limites à la surface $\rho = a$ du guide d'onde cylindrique sont

$$\begin{aligned} E_\phi(a, \phi, z) &= E'_\phi(a, \phi, z) \\ \mu_0 \check{H}_\rho(a, \phi, z) &= \mu' \check{H}'_\rho(a, \phi, z) \\ \check{H}_z(a, \phi, z) &= \check{H}'_z(a, \phi, z) \quad , \quad \forall \phi \in [0, 2\pi] \text{ et } \forall z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

De ces conditions aux limites découle directement les relations suivantes

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa' \\ \frac{du(a)}{d\rho} &= \frac{du'(a)}{d\rho} \quad (\text{pour } E_\phi \text{ et } \check{H}_\rho) \\ \frac{k^2}{\mu_0} u(a) &= \frac{(k')^2}{\mu'} u'(a) \quad (\text{pour } \check{H}_z) \end{aligned}$$

desquelles découle les deux égalités

$$k \frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=ka} = k' A \frac{dH_0^1(x)}{dx} \Big|_{x=k'a}$$

et

$$\frac{k^2}{\mu_0} J_0(ka) = \frac{(k')^2}{\mu'} A H_0^1(k'a)$$

Ces deux dernières égalités sont compatibles entre elles si et seulement si

$$\frac{\mu_0}{k} \frac{d \ln(J_0(x))}{dx} \Big|_{x=ka} = \frac{\mu'}{k'} \frac{d \ln(H_0^1(x))}{dx} \Big|_{x=k'a}$$

Or, si l'on se réfère à la formule (H.9) de l'annexe consacrée aux fonctions de Bessel, on constate qu'en première approximation

$$\frac{\mu'}{k'} \frac{d \ln(H_0^1(x))}{dx} \Big|_{x=k'a} \approx i \frac{\mu'}{k'} \quad \text{lorsque} \quad |k'|a \gg 1$$

En effet, conformément aux hypothèses faites, la conductivité σ' est très grande (pour la pulsation ω considérée). En d'autres termes $\omega \ll 1/\tau' \equiv \sigma'/\varepsilon'$. Dans ces conditions $\omega\mu'\sigma' \gg \varepsilon'\mu'\omega^2$ et par conséquent, en première approximation, $k' \approx \sqrt{i\omega\mu'\sigma'}$. Ainsi

$$\left. \frac{d \ln(J_0(x))}{dx} \right|_{x=ka} \approx i \frac{\mu' k}{\mu_0 k'} = \pm \sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}} \frac{k}{\omega\mu_0} \sqrt{\omega\tau'} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

puisque $\tau' = \varepsilon'/\sigma'$. Mais en première approximation $ka = z'_{0n} + \delta k a$ et par conséquent

$$\left. \frac{d \ln(J_0(x))}{dx} \right|_{x=z'_{0n}+\delta x} = \left. \frac{d^2 \ln(J_0(x))}{dx^2} \right|_{x=z'_{0n}} \delta x = -\delta x$$

puisque

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d^2 \ln(J_0(x))}{dx^2} \right|_{x=z'_{0n}} = \frac{1}{(J_0(x))^2} \left(\frac{d^2 J_0(x)}{dx^2} J_0(x) - \left(\frac{dJ_0(x)}{dx} \right)^2 \right) \Big|_{x=z'_{0n}} \\ &= \frac{1}{(J_0(x))^2} \left(\left(-\frac{1}{x} \frac{dJ_0(x)}{dx} - J_0(x) \right) J_0(x) - \left(\frac{dJ_0(x)}{dx} \right)^2 \right) \Big|_{x=z'_{0n}} \\ &= -1 \quad \text{car} \quad \left. \frac{dJ_0(x)}{dx} \right|_{x=z'_{0n}} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $k'^{0n} = z_{l_{0n}}/a$ et $\omega'_{0n} = c k_{l_{0n}}$. Ensuite

$$\delta k a = -\pm \sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}} \frac{k}{\omega\mu_0} \sqrt{\omega\tau'} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \approx \mp \sqrt{\frac{\mu'\varepsilon_0}{\varepsilon'\mu_0}} \frac{\omega'_{0n}}{\omega} \sqrt{\omega\tau'} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Autrement dit

$$\delta k = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu'\varepsilon_0}{\varepsilon'\mu_0}} \frac{\omega'_{0n}}{\omega} \sqrt{\omega\tau'} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Dans ces conditions, au premier ordre, $\kappa_{0n} = \sqrt{\omega^2 - (\omega'_{0n})^2}/c$ et par voie de conséquence

$$\delta\kappa = -\frac{k'^{0n}}{\kappa_{0n}} \delta k = \frac{1}{a} \frac{\omega'_{0n}}{\sqrt{\omega^2 - (\omega'_{0n})^2}} \sqrt{\frac{\mu'\varepsilon_0}{\varepsilon'\mu_0}} \frac{\omega'_{0n}}{\omega} \sqrt{\omega\tau'} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Considérons ensuite les mode $TM(0, n)$. Selon (6.146) les seules composantes non-nulles du champ électrique et du champ magnétique des modes $TE(0)$ sont :

A l'intérieur du guide d'onde cylindrique $\rho < a$:

$$\begin{aligned}
E_\rho(\rho, \phi, z) &= \frac{\kappa}{-i\omega\varepsilon_0} \frac{du(\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z) \\
E_z(\rho, \phi, z) &= \frac{-k^2}{-i\omega\varepsilon_0} u(\rho) \exp(i\kappa z) \\
\check{H}_\phi(\rho, \phi, z) &= \frac{du(\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z)
\end{aligned}$$

où

$$k = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \kappa^2} \quad \text{et} \quad u(\rho) = u_0 J_0(k\rho)$$

A l'extérieur du guide d'onde cylindrique $\rho > a$:

$$\begin{aligned}
E'_\rho(\rho, \phi, z) &= \frac{\kappa'}{\sigma' - i\omega\varepsilon'} \frac{du'(\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa' z) \\
E'_z(\rho, \phi, z) &= \frac{-(k')^2}{\sigma' - i\omega\varepsilon'} u'(\rho) \exp(i\kappa' z) \\
\check{H}'_\phi(\rho, \phi, z) &= \frac{du'(\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa' z)
\end{aligned}$$

où

$$k' = \sqrt{i\omega\mu' (\sigma' - i\omega\varepsilon') - (\kappa')^2} \quad \text{et} \quad u'(\rho) = u_0 A H_0^1(k'\rho)$$

Il est ici utile, répétons-le, de consulter le très bref annexe H. Le symbole $H_0^1(x)$ désigne la fonction de Bessel de troisième espèce (voir (H.7) et (H.9)). La fonction de Bessel de quatrième espèce n'intervient pas car elle décrirait une onde électromagnétique radialement "entrante" dans le câble. La fonction de Bessel de troisième espèce qui intervient ici décrit une onde électromagnétique radialement "sortante" émise par le câble.

Venons-en maintenant aux points essentiels. Les conditions aux limites à la surface $\rho = a$ du guide d'onde cylindrique sont

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 E_\rho(a, \phi, z) &= \left(\varepsilon' - \frac{\sigma'}{i\omega} \right) E'_\rho(a, \phi, z) \\
E_z(a, \phi, z) &= E'_z(a, \phi, z) \\
\check{H}_\phi(a, \phi, z) &= \check{H}'_\phi(a, \phi, z) \quad , \quad \forall \phi \in [0, 2\pi] \text{ et } \forall z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

De ces conditions aux limites découle directement les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\kappa &= \kappa' \\
\frac{\kappa}{-i\omega} \frac{du(a)}{d\rho} &= \frac{\kappa'}{-i\omega} \frac{du'(a)}{d\rho} \quad (\text{pour } E_\rho) \\
\frac{-k^2}{-i\omega\varepsilon_0} u(a) &= \frac{-(k')^2}{\sigma' - i\omega\varepsilon'} u'(a) \quad (\text{pour } E_z) \\
\frac{du(a)}{d\rho} &= \frac{du'(a)}{d\rho} \quad (\text{pour } \check{H}_\phi)
\end{aligned}$$

qui impliquent les deux égalités

$$\begin{aligned} k \frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=ka} &= k' A \frac{dH_0^1(x)}{dx} \Big|_{x=k'a} \\ \frac{k^2}{i\omega\varepsilon_0} J_0(ka) &= \frac{(k')^2}{i\omega\varepsilon' - \sigma'} A H_0^1(k'a) \end{aligned}$$

Ces deux dernières égalités sont compatibles entre-elles si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{i\omega\varepsilon_0}{k} \frac{d \ln(J_0(x))}{dx} \Big|_{x=ka} &= \frac{i\omega\varepsilon' - \sigma'}{k'} \frac{d \ln(H_0^1(x))}{dx} \Big|_{x=k'a} \\ &\cong i \frac{i\omega\varepsilon' - \sigma'}{k'} \quad \text{lorsque } |k'|a \gg 1 \end{aligned}$$

En effet comme expliqué précédemment et conformément aux hypothèses, en première approximation,

$$k' \approx \sqrt{i\omega\mu'\sigma'}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{d \ln(J_0(x))}{dx} \Big|_{x=ka} &\cong i \frac{(\omega\varepsilon' + i\sigma')k}{\omega\varepsilon_0 k'} = \pm \sqrt{\frac{\sigma'}{\omega\mu'}} \frac{k}{\omega\varepsilon_0} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \frac{1}{\sqrt{\omega\tau'}} \frac{k}{\omega\varepsilon_0} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

compte tenu du fait que $\tau' = \varepsilon'/\sigma'$. L'expression ci-dessus tend vers l'infini lorsque $\sigma' \rightarrow \infty$. Donc, en première approximation $x = k a = z_{0n} + \delta k a$. Puisque,

$$J_0(x) \cong \frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=z_{0n}} \delta x$$

il en résulte que

$$\left(\frac{d \ln(J_0(x))}{dx} \Big|_{x=ka} \right)^{-1} \approx \delta x$$

De cette observation découle alors l'expression que voici

$$\delta k a = \pm \sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}} \sqrt{\omega\tau'} \frac{\omega\varepsilon_0}{k} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Autrement dit

$$\delta k \approx \mp \sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}} \frac{\omega\varepsilon_0}{ka} \sqrt{\omega\tau'} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cong \mp \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu'\varepsilon_0}{\varepsilon'\mu_0}} \frac{\omega}{\omega_{0n}} \sqrt{\omega\tau'} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Finalement, au premier ordre $\kappa = \kappa_0 + \delta\kappa$ où

$$\kappa_{0n} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{0n}^2} \quad \text{et} \quad k_{0n} = \frac{\omega_{0n}}{c} \quad \text{où} \quad \omega_{0n} = \frac{c z_{0n}}{a}$$

et

$$\delta\kappa = -\frac{k_{0n}}{\kappa_{0n}} \delta k = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu' \varepsilon_0}{\varepsilon' \mu_0}} \frac{\omega \sqrt{\omega \tau'}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{0n}^2}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Exercice 6.8

En adoptant une démarche similaire à celle qui est suivie à la sous-section 6.5.1 et 6.5.2 développer une étude des modes susceptibles de s'établir dans un guide d'onde de section carrée de coté a . Les parois de ce guide d'onde sont supposées parfaitement conductrices et le milieu qui l'occupe est assimilable au vide. On limitera la discussion au cas de modes qui sont laissés inchangés (**au signe près**) sous l'action des opérations de symétrie de la section carrée du guide d'onde, à savoir les rotations d'angle $\pi/2$, π , $3\pi/2$ et les réflexions d'axes $x^1 = 0$, $x^2 = 0$ et $x^1 = \pm x^2 = 0$ ou encore, plus simplement, sous l'action de l'échange $x^1 \rightarrow -x^1$ ou $x^2 \rightarrow -x^2$ ou finalement $x^1 \leftrightarrow x^2$.

Classer et discuter les caractéristiques des modes susceptibles d'être transmis, c'est-à-dire qui ne sont pas évanescents. Déterminer les fréquences de coupure de ces modes.

Solution :

Les champs sont donnés par des expressions de la forme (6.136) et, à l'intérieur du guide d'onde, les grandeurs $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$ et $\check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega)$ satisfont aux équations

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) &= 0 \quad \Leftarrow \quad \check{\text{rot}} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \\ \check{\text{rot}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) &= i\omega\mu_0 \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) \quad \Rightarrow \quad \text{div } \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) = 0 \end{aligned}$$

Ces dernières équations sont équivalentes aux suivantes

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad \text{et} \quad \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = 0$$

et le champ magnétique est obtenu à partir de l'expression

$$\check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\check{\text{rot}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)}{i\omega\mu_0}$$

On adopte les coordonnées x^1 , x^2 et $z = x^3$.

Modes transverses électriques

On recherche les solutions $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$ de la forme

$$\begin{aligned} E^1(\mathbf{x}, \omega) &= f(x^1, x^2) \exp(i\kappa z) \\ E^2(\mathbf{x}, \omega) &= g(x^1, x^2) \exp(i\kappa z) \\ E^3(\mathbf{x}, \omega) &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{\partial f(x^1, x^2)}{\partial x^1} + \frac{\partial g(x^1, x^2)}{\partial x^2} = 0 \end{aligned}$$

Vu le problème qui nous concerne il convient de s'intéresser aux solutions pour lesquelles les fonctions $f(x^1, x^2)$ et $g(x^1, x^2)$ sont des combinaisons linéaires des exponentielles

$$\begin{aligned} \exp(i(k_1 x^1 + k_2 x^2)) &, \quad \exp(i(k_1 x^1 - k_2 x^2)) \\ \exp(i(-k_1 x^1 + k_2 x^2)) &\quad \text{et} \quad \exp(i(-k_1 x^1 - k_2 x^2)) \end{aligned}$$

$$\text{où } k_1^2 + k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2$$

et où les grandeurs k_1, k_2 et $\kappa \leq \frac{\omega}{c}$ sont positives ou nulles

Mais compte tenu de la symétrie de la section du guide d'onde et des conditions aux limites qui devront être imposées, il est plus commode d'exprimer ces fonctions $f(x^1, x^2)$ et $g(x^1, x^2)$ à l'aide des solutions suivantes qui sont paires ou impaires relativement aux coordonnées x^1 et x^2

$$\begin{aligned} \cos(k_1 x^1) \cos(k_2 x^2) &, \quad \cos(k_1 x^1) \sin(k_2 x^2) \\ \sin(k_1 x^1) \cos(k_2 x^2) &\quad \text{et} \quad \sin(k_1 x^1) \sin(k_2 x^2) \end{aligned}$$

Il suit de la condition de transversalité $\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = 0$ que

$$\begin{aligned} f(x^1, x^2) &= A k_2 \cos(k_1 x^1) \cos(k_2 x^2) \\ \text{alors } g(x^1, x^2) &= A k_1 \sin(k_1 x^1) \sin(k_2 x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^1, x^2) &= B k_2 \cos(k_1 x^1) \sin(k_2 x^2) \\ \text{alors } g(x^1, x^2) &= -B k_1 \sin(k_1 x^1) \cos(k_2 x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^1, x^2) &= C k_2 \sin(k_1 x^1) \cos(k_2 x^2) \\ \text{alors } g(x^1, x^2) &= -C k_1 \cos(k_1 x^1) \sin(k_2 x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^1, x^2) &= D k_2 \sin(k_1 x^1) \sin(k_2 x^2) \\ \text{alors } g(x^1, x^2) &= D k_1 \cos(k_1 x^1) \cos(k_2 x^2) \end{aligned}$$

L'invariance (au signe près) sous l'action des échanges $x^1 \rightarrow -x^1$ ou $x^2 \rightarrow -x^2$ est donc assurée. Pour ce qui concerne l'invariance sous l'action de l'échange $x^1 \leftrightarrow x^2$ il faut et il suffit que

$$k_1 = k_2 \equiv k \quad \text{où} \quad k = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2}}$$

Les expressions correspondantes pour les composantes du champ électrique s'écrivent

$$E^1(\mathbf{x}, \omega) = k \left[A \cos(k x^1) \cos(k x^2) + B \cos(k x^1) \sin(k x^2) \right. \\ \left. + C \sin(k x^1) \cos(k x^2) + D \sin(k x^1) \sin(k x^2) \right] \exp(i\kappa z)$$

et

$$E^2(\mathbf{x}, \omega) = k \left[A \sin(k x^1) \sin(k x^2) - B \sin(k x^1) \cos(k x^2) \right. \\ \left. - C \cos(k x^1) \sin(k x^2) + D \cos(k x^1) \cos(k x^2) \right] \exp(i\kappa z)$$

Or,

$$\check{H}^1(\mathbf{x}, \omega) = \frac{-1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E^2(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = \frac{-\kappa}{\omega\mu_0} E^2(\mathbf{x}, \omega) \\ \check{H}^2(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E^1(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = \frac{\kappa}{\omega\mu_0} E^1(\mathbf{x}, \omega) \\ \check{H}^3(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left(\frac{\partial E^2(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x^1} - \frac{\partial E^1(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x^2} \right)$$

Venons-en maintenant aux conditions aux limites. Elles sont les suivantes. La composante du champ électrique tangente à la surface du guide d'onde doit être nulle et la composante orthogonale du champ magnétique également. Autrement dit, compte tenu de ce qui précède, il faut et il suffit que les conditions qui suivent soient satisfaites.

$$E^1(\mathbf{x}, \omega)|_{x^2=\pm a/2} \equiv 0 \quad , \quad E^2(\mathbf{x}, \omega)|_{x^1=\pm a/2} = 0$$

et

$$\check{H}^1(\mathbf{x}, \omega)|_{x^1=\pm a/2} \equiv 0 \quad , \quad \check{H}^2(\mathbf{x}, \omega)|_{x^2=\pm a/2} = 0$$

Il est donc nécessaire et suffisant que les égalités qui suivent soient satisfaites

$$A \cos(ka/2) \pm B \sin(ka/2) = 0 \quad , \quad C \cos(ka/2) \pm D \sin(ka/2) = 0$$

et

$$\pm A \sin(ka/2) - C \cos(ka/2) = 0 \quad , \quad -\pm B \sin(ka/2) + D \cos(ka/2) = 0$$

On constate alors qu'on dispose de deux familles de solutions indépendantes. Une première famille notée $TE(+, n)$ pour laquelle

$$A = C = D = 0 \quad \text{et} \quad \sin(ka/2) = 0 \quad \text{Donc} \quad k = \frac{\pi}{a} n \quad , \quad \forall n = 2, 4, 6, \dots$$

$$E^1(\mathbf{x}, \omega) = k B \cos(k x^1) \sin(k x^2) \exp(i\kappa z) \\ E^2(\mathbf{x}, \omega) = -k B \sin(k x^1) \cos(k x^2) \exp(i\kappa z)$$

Une seconde famille notée $TE(-, n)$ pour laquelle

$$A = B = D = 0 \quad \text{et} \quad \cos(ka/2) = 0 \quad \text{Donc} \quad k = \frac{\pi}{a} n \quad , \quad \forall n = 1, 3, 5, \dots$$

$$E^1(\mathbf{x}, \omega) = k C \sin(k x^1) \cos(k x^2) \exp(i\kappa z)$$

$$E^2(\mathbf{x}, \omega) = -k C \cos(k x^1) \sin(k x^2) \exp(i\kappa z)$$

Les pulsations (fréquences) de coupure associées à ces modes sont les suivantes

$$\text{Mode } TE(+, n) \quad : \quad \omega_{+,n} = \frac{\pi\sqrt{2} c}{a} n \quad , \quad \forall n = 2, 4, 6, \dots$$

$$\text{Mode } TE(-, n) \quad : \quad \omega_{-,n} = \frac{\pi\sqrt{2} c}{a} n \quad , \quad \forall n = 1, 2, 5, \dots$$

En outre

$$\text{Mode } TE(+, n) \quad : \quad \kappa = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{+,n}^2} \quad \forall n = 2, 4, 6, \dots$$

$$\text{Mode } TE(-, n) \quad : \quad \kappa = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{-,n}^2} \quad \forall n = 1, 3, 5, \dots$$

Il est suggéré d'esquisser la forme des lignes de champ du champ électrique et les lignes de champ du champ magnétique dans le plan $z = 0$ lorsque $n = 2$ dans le cas $TE(+, n)$ et lorsque $n = 1$ dans le cas $TE(-, n)$. Il suffit pour obtenir une première image de considérer les valeurs du champ électrique et du champ magnétique sur les axes $x^1 = 0$ et $x^2 = 0$.

Modes transverses magnétiques

Dans ce cas il convient de partir des équations

$$\Delta \check{\check{H}}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \check{\check{H}}(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad \text{et} \quad \text{div} \check{\check{H}}(\mathbf{x}, \omega) = 0$$

Le champ électrique est alors obtenu à partir de l'expression

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\mathbf{rot} \check{\check{H}}(\mathbf{x}, \omega)}{-i\omega\epsilon_0}$$

On recherche les solutions $\check{\check{H}}(\mathbf{x}, \omega)$ de la forme

$$\check{\check{H}}^1(\mathbf{x}, \omega) = f(x^1, x^2) \exp(i\kappa z)$$

$$\check{\check{H}}^2(\mathbf{x}, \omega) = g(x^1, x^2) \exp(i\kappa z)$$

$$\check{\check{H}}^3(\mathbf{x}, \omega) = 0$$

$$\text{div} \check{\check{H}}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\partial f(x^1, x^2)}{\partial x^1} + \frac{\partial g(x^1, x^2)}{\partial x^2} = 0$$

La démarche que l'on adopte dans ce cas est similaire à celle qui vient d'être suivie dans le cas transverse électrique.

$$k_1 = k_2 \equiv k \quad \text{où} \quad k = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2}$$

Les expressions correspondantes pour les composantes du champ magnétique s'écrivent

$$\begin{aligned} \check{H}^1(\mathbf{x}, \omega) = & k \left[A \cos(k x^1) \cos(k x^2) + B \cos(k x^1) \sin(k x^2) \right. \\ & \left. + C \sin(k x^1) \cos(k x^2) + D \sin(k x^1) \sin(k x^2) \right] \exp(i\kappa z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \check{H}^2(\mathbf{x}, \omega) = & k \left[A \sin(k x^1) \sin(k x^2) - B \sin(k x^1) \cos(k x^2) \right. \\ & \left. - C \cos(k x^1) \sin(k x^2) + D \cos(k x^1) \cos(k x^2) \right] \exp(i\kappa z) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^1(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{-1}{-i\omega\varepsilon_0} \frac{\partial \check{H}^2(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = \frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0} \check{H}^2(\mathbf{x}, \omega) \\ \mathbf{E}^2(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{-i\omega\varepsilon_0} \frac{\partial \check{H}^1(\mathbf{x}, \omega)}{\partial z} = \frac{-\kappa}{\omega\varepsilon_0} \check{H}^1(\mathbf{x}, \omega) \\ \mathbf{E}^3(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{-i\omega\varepsilon_0} \left(\frac{\partial \check{H}^2(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x^1} - \frac{\partial \check{H}^1(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

Venons-en maintenant aux conditions aux limites. Elles sont les suivantes. La composante du champ électrique tangente à la surface du guide d'onde doit être nulle et la composante orthogonale du champ magnétique également. Autrement dit, compte tenu de ce qui précède, il faut et il suffit que les conditions qui suivent soient satisfaites.

$$E^1(\mathbf{x}, \omega)|_{x^2=\pm a/2} = 0 \quad , \quad E^2(\mathbf{x}, \omega)|_{x^1=\pm a/2} = 0$$

et

$$\check{H}^1(\mathbf{x}, \omega)|_{x^1=\pm a/2} = 0 \quad , \quad \check{H}^2(\mathbf{x}, \omega)|_{x^2=\pm a/2} = 0$$

Autrement dit il est nécessaire et suffisant que les égalités qui suivent soient satisfaites

$$A \cos(ka/2) \pm C \sin(ka/2) = 0 \quad \text{et} \quad B \cos(ka/2) \pm D \sin(ka/2) = 0$$

et

$$\pm A \sin(ka/2) - B \cos(ka/2) = 0 \quad \text{et} \quad -\pm C \sin(ka/2) + D \cos(ka/2) = 0$$

On constate alors qu'on dispose de deux familles de solutions indépendantes. Une première famille notée $TM(+, n)$

$$A = C = D = 0 \quad \text{et} \quad \cos(ka/2) = 0 \quad \text{par conséquent} \quad k = \frac{\pi}{a} n \quad , \quad \forall n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\begin{aligned} \check{H}^1(\mathbf{x}, \omega) &= k B \cos(k x^1) \sin(k x^2) \exp(i\kappa z) \\ \check{H}^2(\mathbf{x}, \omega) &= -k B \sin(k x^1) \cos(k x^2) \exp(i\kappa z) \end{aligned}$$

Une seconde famille notée $TM(-, n)$

$$A = B = D = 0 \quad \text{et} \quad \sin(ka/2) = 0 \quad \text{par conséquent} \quad k = \frac{\pi}{a} n \quad , \quad \forall n = 2, 4, 6, \dots$$

$$\begin{aligned} \check{H}^1(\mathbf{x}, \omega) &= k C \sin(k x^1) \cos(k x^2) \exp(i\kappa z) \\ \check{H}^2(\mathbf{x}, \omega) &= -k C \cos(k x^1) \sin(k x^2) \exp(i\kappa z) \end{aligned}$$

Les pulsations de coupure sont

$$\begin{aligned} \text{Mode } TM(+, n) &: \quad \omega_{+,n} = \frac{\pi\sqrt{2}}{a} c n \quad , \quad \forall n = 1, 3, 5, \dots \\ \text{Mode } TM(-, n) &: \quad \omega_{-,n} = \frac{\pi\sqrt{2}}{a} c n \quad , \quad \forall n = 2, 4, 6, \dots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Mode } TM(+, n) &: \quad \kappa = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{+,n}^2} \quad \forall n = 1, 3, 5, \dots \\ \text{Mode } TM(-, n) &: \quad \kappa = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{-,n}^2} \quad \forall n = 2, 4, 6, \dots \end{aligned}$$

Il est suggère d'esquisser la forme des lignes de champ du champ magnétique et les lignes de champ du champ électrique dans le plan $z = 0$ lorsque $n = 1$ dans le cas $TM(+, n)$ et lorsque $n = 2$ dans le cas $TM(-, n)$. Il suffit pour obtenir une première image de considérer les valeurs du champ électrique et du champ magnétique sur les axes $x^1 = 0$ et $x^2 = 0$.

Exercice 6.9

On considère un model simplifié de propagation des ondes radio dans l'atmosphère terrestre, pour une surface terrestre supposée localement plate, d'équation $x^3 = 0$ en coordonnées cartésiennes. Dans ce modèle la constante diélectrique de l'atmosphère $\varepsilon(x^3)$, $x^3 > 0$ n'est pas uniforme, elle dépend de l'altitude. Considérer les équations de Maxwell-Hertz dans le cadre restreint fondé sur l'hypothèse d'une dépendance du champ électrique par rapport à l'espace et par rapport au temps de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{E}_0 F(x^3) \exp(i(k x^1 - \omega t)) \right]$$

où le symbole k désigne une constante et où la perméabilité magnétique du milieu est celle du vide. Le champ électrique est donc indépendant de la coordonnée x^2 .

1. Montrer que pour des ondes électromagnétiques dont le champ électrique est polarisé parallèlement à la surface terrestre, plus précisément tel que $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_2$, la fonction $F(x^3)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 F(x^3)}{(dx^3)^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon(x^3)}{\varepsilon_0} - k^2 \right) F(x^3) = 0$$

2. Montrer que pour des ondes électromagnétiques dont le champ électrique est polarisé perpendiculairement à la surface terrestre, plus précisément tel que $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_3$, la fonction $F(x^3)$ doit satisfaire à l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 F(x^3)}{(dx^3)^2} + \frac{1}{\varepsilon(x^3)} \frac{d\varepsilon(x^3)}{dx^3} \frac{dF(x^3)}{dx^3} \\ & + \left[\frac{1}{\varepsilon(x^3)} \frac{d^2 \varepsilon(x^3)}{(dx^3)^2} - \left(\frac{1}{\varepsilon(x^3)} \frac{d\varepsilon(x^3)}{dx^3} \right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon(x^3)}{\varepsilon_0} - k^2 \right] F(x^3) = 0 \end{aligned}$$

Montrer ensuite que la fonction $F(x^3)$ est de la forme

$$F(x^3) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon(x^3)}} G(x^3)$$

où la fonction $G(x^3)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 G(x^3)}{(dx^3)^2} + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon(x^3)} \frac{d^2 \varepsilon(x^3)}{(dx^3)^2} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon(x^3)} \frac{d\varepsilon(x^3)}{dx^3} \right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon(x^3)}{\varepsilon_0} - k^2 \right] G(x^3) = 0$$

3. Supposons maintenant que la constante diélectrique $\varepsilon(x^3)$ dépend peu de l'altitude et plus précisément qu'en première approximation elle est de la forme

$$\varepsilon(x^3) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$$

où ω_0 désigne une pulsation de résonance. On demande d'étudier la propagation verticale des ondes dans la ionosphère pour $k = 0$.

Solution :

1. Lorsque $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_2$

Dans la situation qui nous concerne les équations qui gouvernent l'évolution du champ électromagnétique s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\varepsilon(x^3) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) = -i\omega\varepsilon(x^3) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) &= i\omega\mu_0 \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) = 0 \end{aligned}$$

Dans la suite pour alléger l'écriture convenons de poser $x^3 \equiv z$.

Commençons par remarquer que la première des équations qui précèdent est automatiquement satisfaite puisque

$$\operatorname{div} (\varepsilon(x^3) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)) = \mathbf{E}_0 \cdot \left(\frac{d(\varepsilon(z)F(z))}{dz} \mathbf{e}_3 + i k \varepsilon(z) F(z) \mathbf{e}_1 \right) \exp(ikx^1) = 0$$

car $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}_0 = 0$. Ensuite, de la troisième puis de la deuxième des équations qui précèdent, il découle que

$$\check{\operatorname{rot}} \check{\operatorname{rot}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = i\omega \mu_0 \check{\operatorname{rot}} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) = \omega^2 \mu_0 \varepsilon(z) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$$

Finalement, puisque également $\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = 0$ il vient

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon_0} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = 0$$

Si dans cette dernière équation on insère l'expression de $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$ proposée dans l'énoncé du problème on est conduit à l'équation différentielle du deuxième ordre que voici

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon_0} - k^2 \right) F(z) = 0$$

Autrement dit

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} + q(z)^2 F(z) = 0 \quad \text{où} \quad q(z)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon_0} - k^2$$

2. Lorsque $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_3$.

De la première des équations évoquées initialement on déduit la relation

$$\operatorname{div}(\varepsilon(z) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)) = \mathbf{grad} \varepsilon(z) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) + \varepsilon(z) \operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)) = 0$$

d'où l'on tire l'expression

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)) = -\frac{\mathbf{grad} \varepsilon(z) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)}{\varepsilon(z)}$$

Dans ces conditions l'équation

$$-\check{\operatorname{rot}} \check{\operatorname{rot}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) + \omega^2 \mu_0 \varepsilon(z) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{0}$$

déjà évoquée sous 1) prend la forme suivante, compte tenu de la formule (2.63) et de l'expression qui précède de la divergence du champ électrique.

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) + \mathbf{grad} \left(\frac{\mathbf{grad} \varepsilon(z) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)}{\varepsilon(z)} \right) + \omega^2 \mu_0 \varepsilon(z) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{0}$$

Si l'on introduit dans cette dernière équation la forme du champ électrique proposée dans l'énoncé du problème et si l'on effectue le produit scalaire membre à membre par le vecteur de base \mathbf{e}_3 on parvient à l'équation

$$\left[\frac{d^2 F(z)}{dz^2} - k^2 F(z) \right] \exp(ikx^1) + \frac{d}{dz} \left(\frac{F(z)}{\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} \exp(ikx^1) \right) + \omega^2 \mu_0 \varepsilon(z) F(z) \exp(ikx^1) = 0$$

puisque $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_0 = 0$. Par conséquent, après simplification par le facteur exponentiel $\exp(ikx^1)$ il vient,

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} - k^2 F(z) + \frac{d}{dz} \left(\frac{F(z)}{\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} \right) + \omega^2 \mu_0 \varepsilon(z) F(z) = 0$$

ou encore

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} + \frac{dF(z)}{dz} \frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} + \left[\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d^2 \varepsilon(z)}{dz^2} - \frac{1}{\varepsilon(z)^2} \left(\frac{d\varepsilon(z)}{dz} \right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon_0} - k^2 \right] F(z) = 0$$

Or cette équation peut aussi s'écrire sous la forme

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} + \frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} \frac{dF(z)}{dz} + \left[\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d^2 \varepsilon(z)}{dz^2} - \left(\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} \right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon_0} - k^2 \right] F(z) = 0$$

Ensuite, il suffit de remarquer que lors du changement de fonction $F(z) = \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon(z)} G(z)$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 F(z)}{dz^2} + \frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} \frac{dF(z)}{dz} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon(z)}} \left[\frac{d^2 G(z)}{dz^2} + \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d^2 \varepsilon(z)}{dz^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} \right)^2 \right) G(z) \right] \end{aligned}$$

Par conséquent l'équation différentielle à laquelle obéit la fonction $G(z)$ s'écrit

$$\frac{d^2 G(z)}{dz^2} + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d^2 \varepsilon(z)}{dz^2} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d\varepsilon(z)}{dz} \right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon_0} - k^2 \right] G(z) = 0$$

3. Lorsque $k = 0$ et $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 (1 - \omega_0^2/\omega^2)$ l'équation qui gouverne la fonction $G(z)$ s'écrit

$$\frac{d^2 G(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2} G(z) = 0$$

Deux situations sont à distinguer.

Si $\omega > \omega_0$ alors les solutions de l'équation pour la fonction $G(z)$ sont de la forme

$$G(z) = G_0 \exp(\pm i k z) \quad \text{où} \quad k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{c}$$

Le champ électrique présente alors une dépendance de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{E}_0 \exp(\pm i k z)$$

En revanche si $\omega < \omega_0$ alors les solutions de l'équation pour la fonction $G(z)$ sont de la forme

$$G(z) = G_0 \exp(\pm k z) \quad \text{où} \quad k = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}{c}$$

Le champ électrique présente alors une dépendance de la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{E}_0 \exp(\pm k z)$$

Exercice 6.10

On considère la propagation des ondes dans un milieu diélectrique homogène et anisotrope. Les coordonnées cartésiennes sont orientées selon les axes principaux du tenseur diélectrique si bien que

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{(i)} g_{ij}$$

1. Montrer que pour des ondes électromagnétiques planes de pulsation ω et de vecteur d'onde \mathbf{k} on a la relation,

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon_0} = 0$$

2. Poser

$$u = \frac{\omega}{k} \quad \text{et} \quad u_{(i)} = c \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{(i)}}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Les grandeurs $u_{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ sont appelées **vitesse de phase principales**.

Montrer que pour tout vecteur d'onde $\mathbf{k} = k \mathbf{n}$, de direction imposée par un vecteur polaire unité \mathbf{n} , les composantes du champ électrique \mathbf{E} satisfont aux équations homogènes

$$n^j (n^i E_i) + \left(\frac{u^2}{u_{(j)}^2} - 1 \right) E_j = 0$$

où le symbole n^i désigne la i -ième composante du vecteur unité \mathbf{n} .

En déduire l'équation qui fournit la vitesse de phase u pour une direction de propagation définie par ce vecteur unité \mathbf{n} . Montrer que ce système d'équations possède trois solutions non-triviales pour lesquelles les valeurs de u^2 sont réelles, l'une étant nulle et les deux autres positives. Il existe par conséquent deux modes distincts de propagation pour une direction \mathbf{n} donnée.

3. Montrer que ces vitesses de phase satisfont à la relation de Fresnel

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(n^i)^2}{u^2 - u_{(i)}^2} = 0$$

4. Montrer que pour deux modes de même vecteur \mathbf{n} mais de vitesses de phase u^2 différentes, de champs de déplacement électrique $\mathbf{D}^{(\alpha)}$ et $\mathbf{D}^{(\beta)}$, la densité d'énergie électrique totale de la somme des deux modes est la somme des énergies électriques associées à chacun des modes. Autrement dit

$$\sum_{j=1}^3 \frac{(D^{(\alpha)})^j (D^{(\beta)})^j}{\varepsilon_{(j)}} = 0$$

Solution :

1. $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} [\mathcal{E} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))]$.

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \text{Re} [i k^j \varepsilon_{j\ell} \mathcal{E}^\ell \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))] \\ &= \text{Re} [i \sum_{\ell=1}^3 k^\ell \varepsilon_{(\ell)} \mathcal{E}_\ell \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))] = 0 \end{aligned}$$

par conséquent
$$\sum_{\ell=1}^3 k^\ell \varepsilon_{(\ell)} E_\ell(\mathbf{x}, t) = 0$$

$$\begin{aligned} \check{\text{rot}} \check{\text{rot}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \text{Re} [-\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathcal{E}) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))] = -\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) \\ &= -\check{\text{rot}} \frac{\partial}{\partial t} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \check{\text{rot}} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \omega^2 \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon_0} = \mathbf{0}$$

2. De l'équation qui précède il suit que

$$-\mathbf{k}^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) + \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\ell=1}^3 \frac{\varepsilon_{(\ell)}}{\varepsilon_0} \mathbf{e}_\ell (\mathbf{e}_\ell \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{0}$$

ou encore

$$-\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) + \sum_{\ell=1}^3 \frac{u^2}{u_{(\ell)}^2} \mathbf{e}_\ell (\mathbf{e}_\ell \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{0}$$

Posons

$$\mathbf{n} = n^j \mathbf{e}_j$$

Donc, en termes de composantes

$$n^j n^\ell (\mathbf{e}_\ell \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) + \left(\frac{u^2}{u_{(j)}^2} - 1 \right) (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad , \quad \forall j = 1, 2, 3$$

Pour alléger l'écriture posons $E_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$. Il est ensuite aisé de constater que le système d'équations qui précède peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} u_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & u_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & u_{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - n^1 n^1 & -n^1 n^2 & -n^1 n^3 \\ -n^2 n^1 & 1 - n^2 n^2 & -n^2 n^3 \\ -n^3 n^1 & -n^3 n^2 & 1 - n^3 n^3 \end{bmatrix} \\ \times & \begin{bmatrix} u_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & u_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & u_{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1/u_{(1)} \\ E_2/u_{(2)} \\ E_3/u_{(3)} \end{bmatrix} = u^2 \begin{bmatrix} E_1/u_{(1)} \\ E_2/u_{(2)} \\ E_3/u_{(3)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une équation matricielle aux valeurs propres pour une matrice 3×3 hermitienne réelle, visiblement positive. Les valeurs de u^2 en sont les valeurs propres. Les valeurs propres u^2 sont donc réelles et positives à l'exception de l'une d'entre-elles qui est nulle, comme il est aisé de la constater. Le vecteur propre correspondant à la valeur propre $u^2 = 0$ est, à un facteur près, de la forme $(n^1/u_{(1)}, n^2/u_{(2)}, n^3/u_{(3)})$ comme il est aisé de le vérifier.

3. De l'équation établie sous 2) il résulte que

$$\frac{n^j}{u^2 - u_{(j)}^2} (n^i E_i) + \frac{1}{u_{(j)}^2} E_j = 0$$

Par conséquent

$$\sum_{j=1}^3 n^j \left[\frac{n^j}{u^2 - u_{(j)}^2} (n^i E_i) + \frac{1}{u_{(j)}^2} E_j \right] = 0$$

Autrement dit

$$\sum_{j=1}^3 \left[\frac{(n^j)^2}{u^2 - u_{(j)}^2} (n^i E_i) + \frac{1}{u_{(j)}^2} (n^j E_j) \right] = \sum_{j=1}^3 \frac{(n^j)^2}{u^2 - u_{(j)}^2} (n^i E_i) + \sum_{j=1}^3 \frac{n^j E_j}{u_{(j)}^2} = 0$$

Or il découle de l'équation $\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = 0$ que

$$\sum_{j=1}^3 \frac{n^j E_j}{u_{(j)}^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{k^j \varepsilon_{(j)} E_j}{\varepsilon_0 c^2 k} = 0$$

Par conséquent

$$\sum_{j=1}^3 \frac{(n^j)^2}{u^2 - u_{(j)}^2} = 0$$

puisque $n^i E_i \neq 0$ dans la mesure où $u \neq u_{(j)}$ $j = 1, 2, 3$.

4. Considérons, maintenant deux modes de même vecteur \mathbf{n} mais de vitesses de phase u^2 différentes. Soient $\mathbf{D}^{(\alpha)}$ et $\mathbf{D}^{(\beta)}$ les champs de déplacement électrique correspondants. Dans ces conditions, vu la forme du tenseur diélectrique

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \frac{(D^{(\alpha)})^j (D^{(\beta)})^j}{\varepsilon_{(j)}} &= \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{(j)} (E^{(\alpha)})^j (E^{(\beta)})^j \\ &= \varepsilon_0 c^2 \sum_{j=1}^3 \frac{E_j^{(\alpha)} E_j^{(\beta)}}{(u_{(j)})^2} = \varepsilon_0 c^2 \sum_{j=1}^3 \frac{E_j^{(\alpha)}}{u_{(j)}} \frac{E_j^{(\beta)}}{u_{(j)}} = 0 \end{aligned}$$

puisque le produit scalaire de deux vecteurs propres d'une matrice hermitienne qui sont associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Exercice 6.11

Une onde plane électromagnétique plane polarisée linéairement est perpendiculairement incidente sur une surface plane d'épaisseur a d'un milieu conducteur de conductivité σ , de constante diélectrique ε_0 et de perméabilité magnétique μ_0 .

1. Déterminer les coefficients de réflexion et de transmission dus à cet écran. Discuter le comportement de ces coefficients en fonction de la pulsation ω . Quelle est la profondeur de pénétration du rayonnement incident. Apparaît-il des comportements résonants selon la valeur de la pulsation ?

2. Discuter la limite où $a \rightarrow 0$ et $\sigma \rightarrow \infty$.

Solution :

Exercice relatif aux sous-section 6.4.1 et 6.4.2

La démarche qui peut être adoptée dans la résolution de ce problème est très semblable à celle qui concerne la résolution de l'exercice 6.4. Aussi, la première étape de la résolution du présent exercice est-t-elle décrite de manière sommaire.

Soient $x^1 = -a/2$ et $x^1 = a/2$ les surfaces de séparation du vide et du milieu constituant la paroi et soit $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ un vecteur unité orthogonal à ces surfaces.

La forme des expressions des champs électrique et magnétique qui décrivent les ondes planes incidente, réfléchie et transmise, $\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{x}, t)$, $\check{\mathbf{H}}_{inc}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{E}_{ref}(\mathbf{x}, t)$, $\check{\mathbf{H}}_{ref}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{E}_{trans}(\mathbf{x}, t)$, $\check{\mathbf{H}}_{trans}(\mathbf{x}, t)$ ainsi que les ondes planes qui règnent dans le milieu intermédiaire $\mathbf{E}_{parois}(\mathbf{x}, t)$, $\check{\mathbf{H}}_{parois}(\mathbf{x}, t)$ est la même au fait près que maintenant le vecteur \mathbf{k}' est complexe. Les parties réelle et imaginaire de ce vecteur seront notées k'_0 et κ' respectivement. Plus précisément

$$\begin{aligned} \mathbf{k}' &= \mathbf{k}'_0 + i\boldsymbol{\kappa}' \quad \text{où} \quad \mathbf{k}'_0 = k'_0 \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\kappa}' = \kappa' \mathbf{n} \\ \text{ou encore} \quad \mathbf{k}' &= k' \mathbf{n} \quad \text{où} \quad k' = k'_0 + i \kappa' \end{aligned}$$

Puisque la constante diélectrique et la perméabilité magnétique du milieu intermédiaire sont celles du vide il résulte de (6.77) que

$$(k'_0)^2 - (\kappa')^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{et} \quad 2 k'_0 \kappa' = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{\omega\tau'} \quad \text{où} \quad \tau' = \frac{\varepsilon_0}{\sigma'}$$

Par conséquent

$$k'_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + (\omega\tau')^2} + \omega\tau'}{2\omega\tau'}} \quad \text{et} \quad \kappa' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + (\omega\tau')^2} - \omega\tau'}{2\omega\tau'}}$$

Quant au milieu extérieurs le vecteur d'onde vaut

$$\mathbf{k} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \mathbf{n} = \omega \mathbf{n}/c = k \mathbf{n}$$

Les conditions aux limites sur les surfaces $x^1 = -a/2$ et $x^1 = a/2$ sont similaires à celles qui interviennent dans la résolution de l'exercice 6.4. Les champs électrique et magnétique tangent à la surface de séparation des milieux sont continus à chaque instant. En complète analogie avec la résolution de l'exercice 6.4 on est conduit aux résultats que voici

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{trans} &= \frac{\exp(-ika) \mathcal{E}_{inc}}{\cos(k'a) - iB \sin(k'a)} \quad \text{où} \quad B = \frac{1 + A^2}{2A} \geq 1 \\ \text{et} \\ \mathcal{E}_{ref} &= \frac{iC \sin(k'a) \exp(-ika) \mathcal{E}_{inc}}{\cos(k'a) - iB \sin(k'a)} \quad \text{où} \quad C = \frac{1 - A^2}{2A} = \sqrt{B^2 - 1} \end{aligned}$$

Dans ces dernières expressions

$$A = \frac{k}{k'} \quad \text{donc} \quad B = \frac{(k'/k)^2 + 1}{2 k'/k} \quad \text{et} \quad C = \frac{(k'/k)^2 - 1}{2 k'/k}$$

Rappelons que $\exp(+ika/2) \mathcal{E}_{trans}$, $\exp(+ika/2) \mathcal{E}_{ref}$ et $\exp(-ika/2) \mathcal{E}_{inc}$ sont directement liés au champ électrique transmis sur la surface $x^1 = a/2$, réfléchi et incident sur la surface $x^1 = -a/2$.

Rappelons de plus que la grandeur k' est complexe et par conséquent $\exp(ik'a) = \exp(ik'_0 a) \exp(-\kappa' a)$. Par conséquent

$$\cos(k'a) = \cosh(\kappa' a) \cos(k'_0 a) - i \sinh(\kappa' a) \sin(k'_0 a)$$

et

$$\sin(k'a) = \cosh(\kappa' a) \sin(k'_0 a) + i \sinh(\kappa' a) \cos(k'_0 a)$$

Ainsi, moyennant un calcul fastidieux, mais ne présentant aucune difficulté, on peut établir les résultats qui suivent. Premièrement

$$\begin{aligned} & |\cos(k'a) - iB \sin(k'a)|^2 \\ &= 1 + (B B^* - 1) \sin^2(k'_0 a) + (B B^* + 1) \sinh^2(\kappa' a) \\ &+ \frac{B + B^*}{2} \sinh(2 \kappa' a) + \frac{B - B^*}{2i} \sin(2 k'_0 a) \\ &= \frac{B B^* + 1}{2} \cosh(2 \kappa' a) + \frac{B + B^*}{2} \sinh(2 \kappa' a) \\ &- \frac{B B^* - 1}{2} \cos(2 k'_0 a) + \frac{B - B^*}{2i} \sin(2 k'_0 a) \end{aligned}$$

Pour évaluer les constantes B et C il convient de commencer par noter que

$$\frac{1}{A^2} = \left(\frac{k'}{k}\right)^2 = 1 + \frac{i}{\omega\tau'} \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{A} = \sqrt{1 + \frac{i}{\omega\tau'}}$$

Notons que

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{(A^*)^2} = 2 \quad \text{et donc} \quad A^2 + (A^*)^2 = 2 (AA^*)^2 = \frac{2\omega\tau'}{\sqrt{1 + (\omega\tau')^2}}$$

Dans ces conditions

$$\begin{aligned} BB^* &= \frac{(1 + A^2)(1 + (A^*)^2)}{4AA^*} = \frac{1 + A^2 + (A^*)^2 + (AA^*)^2}{4AA^*} = \frac{1 + 3(AA^*)^2}{4AA^*} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1 + (AA^*)^2}{AA^*} + \frac{AA^*}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} CC^* &= \frac{(1 - A^2)(1 - (A^*)^2)}{4AA^*} = \frac{1 - A^2 - (A^*)^2 + (AA^*)^2}{4AA^*} = \frac{1 - (AA^*)^2}{4AA^*} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1 + (AA^*)^2}{AA^*} - \frac{AA^*}{2} \end{aligned}$$

et plus explicitement

$$BB^* = \frac{1}{4} \frac{1 + (\omega\tau'/\sqrt{1 + (\omega\tau')^2})^2}{\omega\tau'/\sqrt{1 + (\omega\tau')^2}} + \frac{1}{2} \frac{\omega\tau'}{\sqrt{1 + (\omega\tau')^2}}$$

et

$$CC^* = \frac{1}{4} \frac{1 + (\omega\tau'/\sqrt{1 + (\omega\tau')^2})^2}{4\omega\tau'/\sqrt{1 + (\omega\tau')^2}} - \frac{1}{2} \frac{\omega\tau'}{\sqrt{1 + (\omega\tau')^2}}$$

Il est également important pour la suite d'exprimer les parties réelle et imaginaire du coefficient B .

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \left(A + \frac{1}{A} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{k(k'_0 - i\kappa')}{|k'|^2} + \frac{k'_0 + i\kappa'}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{k'_0 - i\kappa'}{k} \frac{\omega\tau'}{\sqrt{1 + (\omega\tau')^2}} + \frac{k'_0 + i\kappa'}{k} \right) \\ &= \frac{k'_0}{2k} \left(1 + \frac{\omega\tau'}{\sqrt{1 + (\omega\tau')^2}} \right) + i \left(\frac{\kappa'}{2k} \left(1 - \frac{\omega\tau'}{\sqrt{1 + (\omega\tau')^2}} \right) \right) \end{aligned}$$

puisque

$$|k'|^2 = k^2 \frac{\sqrt{1 + (\omega\tau')^2}}{\omega\tau'}$$

De l'expression qui précède pour B on en déduit immédiatement les expressions qui suivent pour les parties réelle et imaginaire de cette grandeur. Elles s'écrivent

$$\frac{B + B^*}{2} = \frac{k'_0}{2k} \left(1 + \frac{\omega\tau'}{\sqrt{1 + \omega^2 (\tau')^2}} \right)$$

et

$$\frac{B - B^*}{2i} = \frac{\kappa'}{2k} \left(1 - \frac{\omega\tau'}{\sqrt{1 + \omega^2 (\tau')^2}} \right)$$

Pour déterminer les vecteurs de Poynting moyens il convient de partir de la formule (6.9). Ainsi, pour l'onde incidente, on a l'expression

$$\bar{\mathbf{S}}_{inc} = \frac{c^2 \mathbf{k}}{\omega} \frac{\varepsilon_0 \|\mathcal{E}_{inc}\|^2}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mathcal{E}_{inc} \cdot \mathcal{E}_{inc}^*}{2} \mathbf{n}$$

Pour l'onde transmise

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_{trans} &= \frac{c^2 \mathbf{k}}{\omega} \frac{\varepsilon_0 \|\mathcal{E}_{trans}\|^2}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mathcal{E}_{trans} \cdot \mathcal{E}_{trans}^*}{2} \mathbf{n} \\ &= T(\omega) \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mathcal{E}_{inc} \cdot \mathcal{E}_{inc}^*}{2} \mathbf{n} \end{aligned}$$

Le coefficient de transmission $T(\omega)$ s'écrit

$$T(\omega) = \left| \frac{1}{\cos(k'a) - iB \sin(k'a)} \right|^2 = \frac{1}{D(\omega)}$$

où nous avons posé

$$D(\omega) = 1 + (B B^* - 1) \sin(k'_0 a)^2 + (B B^* + 1) \sinh(\kappa' a)^2 + \frac{B + B^*}{2} \sinh(2 \kappa' a) + \frac{B - B^*}{2i} \sin(2 k'_0 a)$$

Pour l'onde réfléchie

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{S}}_{ref} &= \frac{-c^2 \mathbf{k} \varepsilon_0 \|\mathcal{E}_{ref}\|^2}{\omega} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mathcal{E}_{ref} \cdot \mathcal{E}_{ref}^*}{2} (-\mathbf{n}) \\ &= R(\omega) \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\mathcal{E}_{inc} \cdot \mathcal{E}_{inc}^*}{2} (-\mathbf{n}) \end{aligned}$$

Le coefficient de réflexion $R(\omega)$ quant à lui s'écrit

$$R(\omega) = \left| \frac{-iC \sin(k'a)}{\cos(k'a) - iB \sin(k'a)} \right|^2 = \frac{C C^* (\sin(k'_0 a)^2 + \sinh(\kappa' a)^2)}{D(\omega)}$$

Il est alors aisé de constater que

$$T(\omega) + R(\omega) \leq 1$$

Finalement on remarquera qu'à haute fréquence, c'est-à-dire lorsque $\omega \tau' \gg 1$, les pulsations ω pour lesquelles l'épaisseur a coïncide "grosso modo" avec un nombre entier de demi-longueurs d'onde et un nombre impair de quart de longueurs d'onde correspondent à des valeurs maximales et minimales du coefficient de transmission $T(\omega)$.

Pour s'en convaincre il faut commencer par observer que

$$\begin{aligned} &\cos(k'a) - iB \sin(k'a) \\ &= \cos(k'_0 a) (\cosh(\kappa' a) + B \sinh(\kappa' a)) - i \sin(k'_0 a) (\sinh(\kappa' a) + B \cosh(\kappa' a)) \\ &= [\cos(k'_0 a) (\cosh(\kappa' a) + B_r \sinh(\kappa' a)) + \sin(k'_0 a) (B_i \cosh(\kappa' a))] \\ &\quad - i [\sin(k'_0 a) (\sinh(\kappa' a) + B_r \cosh(\kappa' a)) - \cos(k'_0 a) (B_i \sinh(\kappa' a))] \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression les symboles B_r et B_i désignent respectivement les parties réelle et imaginaire du coefficient B . Ensuite il faut vérifier que le carré du module de cette dernière expression s'écrit

$$\begin{aligned} |\cos(k'a) - iB \sin(k'a)|^2 &= (\cosh(\kappa' a) + B_r \sinh(\kappa' a))^2 + (B_r^2 - 1) (\sin(k'_0 a))^2 \\ &\quad + 2B_i \sin(k'_0 a) \cos(k'_0 a) + B_i^2 ((\sin(k'_0 a))^2 + \sinh(\kappa' a)^2) \end{aligned}$$

Or, lorsque $\omega\tau' \gg 1$

$$B_r \cong \frac{k'_0}{k} \left(1 - \frac{1}{4(\omega\tau')^2}\right) \cong 1 - \frac{1}{8(\omega\tau')^2} \quad \text{et} \quad B_i \cong \frac{1}{8(\omega\tau')^3}$$

Ainsi, en première approximation

$$|\cos(k'a) - iB \sin(k'a)|^2 \cong \exp(2\kappa'a) + \frac{(\sin(k'_0 a))^2}{4(\omega\tau')^2}$$

Le dénominateur qui figure dans l'expression du coefficient de transmission passe par une valeur minimale lorsque $k'a = n\pi$ et par une valeur maximale lorsque $k'a = (n + 1/2)\pi$.

Exercice 6.12

Considérons un câble coaxial cylindrique, de rayons a et $b < a$, tel qu'il est décrit à la sous-section 6.5.3. On demande d'étudier le mode $TM(0)$ susceptibles d'intervenir lorsque les milieux conducteurs qui constituent le câble possèdent une conductivité infinie et que le milieu présente une susceptibilité μ et une perméabilité ε . Quels sont les courants d'énergie électromagnétiques qui se manifestent ?

Solution :

Il convient d'utiliser des coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) dont l'axe Oz coïncide avec l'axe du câble. Trois régions interviennent. La région conductrice $0 \leq \rho \leq b$, la région $b \leq \rho \leq a$ assimilable au vide et la région conductrice $a \leq \rho \leq +\infty$. Pour un rappel utile au sujet des modes $TM(0)$ il convient de se référer aux expressions (6.146).

Les seules composantes non-nulles du champ électrique et du champ magnétique dans la région $b \leq \rho \leq a$ sont :

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho, \phi, z) &= \frac{\kappa}{-i\omega\varepsilon} \frac{dy(k\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z) \\ E_z(\rho, \phi, z) &= \frac{-(k)^2}{-i\omega\varepsilon} y(k\rho) \exp(i\kappa z) \\ \check{H}_\phi(\rho, \phi, z) &= \frac{dy(k\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z) \\ k &= \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - (\kappa)^2} \end{aligned}$$

Quant aux conditions aux limites en $\rho = a$ et $\rho = b$ elles s'écrivent,

$$E_z(a, \phi, z) = E_z(b, \phi, z) = 0$$

Ces conditions aux limites en $\rho = b$ et $\rho = a$ sont donc satisfaites si

$$y(k a) = 0 \quad \text{et} \quad y(k b) = 0$$

La fonction $y(x)$ qui intervient est une solution de l'équation différentielle (6.144). Elle est de la forme

$$y(k\rho) = A J_0(k\rho) + B Y_0(k\rho)$$

où les symboles A et B désignent des constantes d'intégrations. Les conditions aux limites conduisent aux conditions suivantes

$$\begin{aligned} A J_0(k b) + B Y_0(k b) &= 0 \\ A J_0(k a) + B Y_0(k a) &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, une solution non-triviale existe si et seulement si

$$J_0(k b) Y_0(k a) - J_0(k a) Y_0(k b) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{B}{A} = -\frac{J_0(k b)}{Y_0(k b)} = -\frac{J_0(k a)}{Y_0(k a)}$$

La première équation ci-dessus détermine les valeurs de k possibles et la seconde fixe le rapport B/A .

Lorsque $ka > kb \gg 1$, compte tenu des comportements asymptotiques (H.8), on a

$$\begin{aligned} J_0(k a) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi k a}} \cos(k a - \pi/4) \quad , \quad J_0(k b) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi k b}} \cos(k b - \pi/4) \\ \text{et} \\ Y_0(k a) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi k a}} \sin(k a - \pi/4) \quad , \quad Y_0(k b) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi k b}} \sin(k b - \pi/4) \end{aligned}$$

Dans ces conditions

$$\begin{aligned} J_0(k b) Y_0(k a) - J_0(k a) Y_0(k b) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi k a}} \sqrt{\frac{2}{\pi k b}} \\ &\times [\cos(k b - \pi/4) \sin(k a - \pi/4) - \cos(k a - \pi/4) \sin(k b - \pi/4)] \\ &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi k a}} \sqrt{\frac{2}{\pi k b}} \sin(k(a - b)) = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$k = \frac{n \pi}{a - b} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

et

$$\frac{B}{A} = -\frac{\cos(k a - \pi/4)}{\sin(k a - \pi/4)} = \tan(k a + \pi/4) = \tan\left(\pi \frac{(4n + 1)a - b}{4(a - b)}\right)$$

Exercice 6.13

Montrer que pour une onde électromagnétique plane de pulsation ω et de vecteur d'onde \mathbf{k} qui se propage selon la direction fixée par le vecteur unité \mathbf{n} dans un milieu homogène, électriquement anisotrope et magnétiquement isotrope, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} \mu_0 \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)^2 \\ &= \frac{1}{2 \mu_0 u^2} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \wedge \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{1}{\mu_0 u} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)] \end{aligned}$$

Dans ces dernières expressions le symbole u désigne la vitesse de phase $\omega/\|\mathbf{k}\|$.

Une vitesse de propagation $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ de l'énergie électromagnétique, selon la direction fournie par le vecteur de Poynting, peut être définie à l'aide de la relation

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

dans laquelle on impose à cette vitesse d'être liée à la vitesse de phase u par la relation

$$u = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

Montrer qu'alors

$$h(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \mu_0 \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)^2$$

et que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = u \frac{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2}$$

ou encore

$$\left(\frac{u}{\|\mathbf{v}\|} \right)^2 = 1 - \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2}{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2}$$

Solution :

La forme générale des champs est donnée par les expressions suivantes.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} [\mathcal{E} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))] \quad \text{où} \quad \mathbf{n} = \frac{c \mathbf{k}}{\omega}$$

et

$$D^j(\mathbf{x}, t) = \varepsilon^{j\ell} E_\ell(\mathbf{x}, t)$$

De plus, en vertu des équations de Maxwell-Hertz

$$\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\omega} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mathbf{k} \wedge \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)}{\omega}$$

où $\check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$

Des relations précédentes il suit que

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) &= \omega \mathbf{k} \wedge \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \omega \mathbf{k} \wedge \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) \\ &= -\mu_0 \omega^2 \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

Par conséquent, compte tenu de la formule de Laplace (A.44)

$$\mathbf{k}^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{k} = \mu_0 \omega^2 \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$$

Le produit scalaire, membre à membre de l'égalité ci-dessus avec le vecteur $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ conduit à l'égalité

$$\mathbf{k}^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2 = \mu_0 \omega^2 \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$$

de laquelle découle l'expression

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mathbf{k}^2}{2 \mu_0 \omega^2} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2] \\ &= \frac{1}{2 \mu_0 u^2} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2] \end{aligned}$$

En outre, il suit des relations de Maxwell-Hertz qui précèdent que

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)^2 &= \frac{(\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2}{\mu_0^2 \omega^2} = \frac{\mathbf{k}^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2}{\mu_0^2 \omega^2} \\ &= \frac{1}{\mu_0^2 u^2} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2] \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\frac{\mu_0 \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)^2}{2} = \frac{1}{2 \mu_0 u^2} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2]$$

Pour le vecteur de Poynting on a l'expression

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \wedge \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \wedge \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\mu_0 \omega} \\ &= -\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\mu_0 \omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{k}}{\mu_0 \omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 \\ &= \frac{1}{u \mu_0} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)] \end{aligned}$$

Ensuite, puisque

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) u$$

alors compte tenu de l'expression précédente du vecteur de Poynting il vient

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{u} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)] \\ &= \frac{1}{\mu_0 u^2} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2] \end{aligned}$$

et par conséquent, finalement

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)}{h(\mathbf{x}, t)} = u \frac{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2}$$

Exercice 6.14★

Considérons un milieu isolant isotrope dont la constante diélectrique $\varepsilon(\mathbf{x})$ dépend de l'endroit. La perméabilité magnétique est celle du vide. On souhaite étudier les propriétés des ondes électromagnétiques de pulsation ω qui se propagent dans un tel milieu. Dans ce but, comme en (6.136), il convient de poser

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i \omega t)]$$

1. Montrer que la composante de Fourier $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$ du champ électrique satisfait à l'équation

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) + k(\mathbf{x})^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = -\mathbf{grad} \left(\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \frac{\mathbf{grad} \varepsilon(\mathbf{x})}{\varepsilon(\mathbf{x})} \right)$$

$$\text{où on a posé : } k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}}$$

2. Supposons que les variations relatives de la constante diélectrique $\varepsilon(\mathbf{x})$ de même que celles du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$ sont "lentes", c'est-à-dire relativement faibles sur une distance de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde associée à la pulsation ω . Plus précisément supposons que

$$\frac{1}{k(\mathbf{x})} \left| \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x})}{\partial x^j} \right| \ll \varepsilon(\mathbf{x}) \quad , \quad \frac{1}{k(\mathbf{x})^2} \left| \frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{x})}{\partial x^j \partial x^\ell} \right| \ll \varepsilon(\mathbf{x})$$

et $\frac{1}{k(\mathbf{x})} \left| \frac{\partial E_j(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x^\ell} \right| \ll |E_j(\mathbf{x}, \omega)| \quad , \quad \forall j \text{ et } \ell = 1, 2, 3 \text{ et } \forall \mathbf{x}.$

Montrer que dans ces conditions le second membre de l'équation de champ qui figure ci-dessus peut être négligé.

3. Pour séparer les variations spatiales rapides du champ $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$ des variations spatiales lentes il convient de poser

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = \exp(i k_0 S(\mathbf{x}, \omega)) \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega)$$

et

$$\check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) = \exp(i k_0 S(\mathbf{x}, \omega)) \check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \omega)$$

Dans cette expression la fonction $S(\mathbf{x}, \omega)$ est réelle et le symbole $\mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) \in \mathbb{C}^3$. Enfin, le symbole k_0 désigne le rapport $k_0 = \omega/c$. L'idée est d'exprimer les variations spatiales rapides du champ $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$ à l'aide du facteur de phase $\exp(i k_0 S(\mathbf{x}, \omega))$. Montrer que dans ces conditions le facteur de phase obéit à l'équation

$$(\mathbf{grad} S(\mathbf{x}))^2 + \frac{1}{i k_0} \Delta S(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}$$

Solution :

1. Il découle des équations de Maxwell-Hertz,

$$\check{\mathbf{rot}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\mu_0 \frac{\partial \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial(\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))}{\partial t}$$

et

$$\mathit{div} (\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad \text{et} \quad \mathit{div} (\mu_0 \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)) = 0$$

que les champs de vecteurs complexes $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$ et $\check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega)$ satisfont aux équations

$$\check{\mathbf{rot}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = i \omega \mu_0 \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{et} \quad \check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) = -i \omega \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$$

et

$$\mathit{div} (\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)) = 0 \quad \text{et} \quad \mathit{div} (\mu_0 \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega)) = 0$$

On notera que ces équations sont redondantes. En effet les deux équations ci-dessus découlent des deux équations qui les précèdent. Cela dit, il résulte des équations qui viennent d'être mentionnées que

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{rot}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) &= -\Delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) + \mathbf{grad} \mathit{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = i \omega \mu_0 \check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) \\ &= \omega^2 \mu_0 \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \end{aligned}$$

Par conséquent, finalement

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) + k(\mathbf{x}, \omega)^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = -\mathbf{grad} \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \frac{\mathbf{grad} \varepsilon(\mathbf{x})}{\varepsilon(\mathbf{x})} \right]$$

$$\text{où} \quad k(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}}$$

puisque

$$\mathit{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = -\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \frac{\mathbf{grad} \varepsilon(\mathbf{x})}{\varepsilon(\mathbf{x})}$$

2. De la "lente" variation de la constante diélectrique $\varepsilon(\mathbf{x})$ il découle que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial x^\ell} \left(\frac{E^j(\mathbf{x}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{x})} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x})}{\partial x^j} \right) \right| = \left| \frac{\partial E^j(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x^\ell} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x})} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x})}{\partial x^j} + E^j(\mathbf{x}, \omega) \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 \varepsilon(\mathbf{x})}{\partial x^\ell \partial x^j} \right. \\ & - \left. E^j(\mathbf{x}, \omega) \left(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x})} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x})}{\partial x^\ell} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{x})} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x})}{\partial x^j} \right) \right| \\ & \ll k(\mathbf{x}, \omega) |E^j(\mathbf{x}, \omega)| k(\mathbf{x}, \omega) + |E^j(\mathbf{x}, \omega)| k(\mathbf{x}, \omega)^2 + |E^j(\mathbf{x}, \omega)| k(\mathbf{x}, \omega)^2 \end{aligned}$$

3. De la séparation des variations spatiales lentes et rapides du champ électrique suivent les relations

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{rot}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) &= \exp(i k_0 S(\mathbf{x}, \omega)) (i k_0 \mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) + \check{\mathbf{rot}} \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega)) \\ &= i \omega \mu_0 \exp(i k_0 S(\mathbf{x}, \omega)) \check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \omega) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) &= \exp(i k_0 S(\mathbf{x}, \omega)) (i k_0 \mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge \check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \omega) + \check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \omega)) \\ &= -i \omega \varepsilon(\mathbf{x}) \exp(i k_0 S(\mathbf{x}, \omega)) \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \mathit{div} (\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)) &= \exp(i k_0 S(\mathbf{x}, \omega)) \\ \times (\mathbf{grad} \varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) + i k_0 \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) + \varepsilon(\mathbf{x}) \mathit{div} \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega)) &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathit{div} (\mu_0 \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega)) &= \exp(i k_0 S(\mathbf{x}, \omega)) \\ \times (i k_0 \mu_0 \mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \cdot \check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \omega) + \mu_0 \mathit{div} \check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \omega)) &= 0 \end{aligned}$$

Après élimination des facteurs exponentiels dans les relations ci-dessus on parvient aux équations que voici, qui relient les champs de vecteurs

complexes $\mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega)$ et $\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \omega)$ et la fonction $S(\mathbf{x}, \omega)$. Des deux premières relations il suit que

$$\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) - c\mu_0 \check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{i k_0} \check{\mathbf{rot}} \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega)$$

et

$$\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge \check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \omega) + c \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{i k_0} \check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \omega)$$

et des deux dernières il découle que

$$\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{i k_0} \left(\frac{\mathbf{grad} \varepsilon(\mathbf{x})}{\varepsilon(\mathbf{x})} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) + \mathit{div} \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) \right)$$

et

$$\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \cdot \check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{i k_0} \mathit{div} \check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \omega)$$

A partir de la première de ces quatre relations exprimons le champ $\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \omega)$ en fonction du champ $\mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega)$. Il vient

$$\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{1}{i k_0} \check{\mathbf{rot}} \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) \right)$$

Après remplacement de $\check{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \omega)$ par l'expression précédente dans la deuxième équation on parvient à l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_0 c} \left(\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge (\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega)) \right) \\ & + \frac{1}{i k_0} \mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge \check{\mathbf{rot}} \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) + c \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) \\ & = \frac{-1}{i k_0} \frac{1}{\mu_0 c} \left(\check{\mathbf{rot}} (\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega)) + \frac{1}{i k_0} \check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{rot}} \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) \right) \end{aligned}$$

qui, après groupement des termes, prend la forme

$$\begin{aligned} & \mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge (\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega)) + c^2 \mu_0 \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) \\ & = -\frac{1}{i k_0} \left(\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge \check{\mathbf{rot}} \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) + \check{\mathbf{rot}} (\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega)) \right) \\ & + \frac{1}{k_0^2} \check{\mathbf{rot}} \check{\mathbf{rot}} \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) \end{aligned}$$

En première approximation on peut, dans cette dernière équation, négliger la contribution des termes qui sont associés à des dérivées des grandeurs à variations lentes. Autrement dit, compte tenu de la formule de Laplace (A.44) et après changement de signe dans les deux membres,

$$\begin{aligned} (\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega)^2 - c^2 \mu_0 \varepsilon(\mathbf{x})) \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) &= (\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega)) \mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \\ &= \frac{1}{i k_0} \check{\mathbf{rot}} (\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega)) \end{aligned}$$

Mais, pour les mêmes raisons, le dernier terme du membre de gauche peut également être négligé en vertu de la troisième des relations évoquées précédemment. Ainsi

$$(\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega)^2 - c^2 \mu_0 \varepsilon(\mathbf{x})) \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{i k_0} \check{\mathbf{rot}} (\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega))$$

Or selon la formule (2.73), dans le membre de droite de cette dernière égalité,

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{rot}}(\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \wedge \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega)) &= \mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \operatorname{div} \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) \\ &- \Delta S(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) + (\mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \nabla) \mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) - (\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega) \cdot \nabla) \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) \\ &\cong -\Delta S(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) \end{aligned}$$

en vertu de mêmes arguments. Finalement

$$((\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega))^2 - c^2 \mu_0 \varepsilon(\mathbf{x})) \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{i k_0} \Delta S(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{e}(\mathbf{x}, \omega)$$

et par conséquent, en première approximation,

$$(\mathbf{grad} S(\mathbf{x}, \omega))^2 + \frac{1}{i k_0} \Delta S(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\varepsilon(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}$$

Exercice 6.15★

Considérons un câble coaxial cylindrique tel qu'il est décrit à la sous-section 6.5.3. On demande d'étudier les modes *TEM* susceptibles d'intervenir lorsque les milieux conducteurs qui délimitent le câble présentent une conductivité finie mais grande, c'est-à-dire telle que la profondeur de pénétration δ du champ électromagnétique dans le milieu conducteur est beaucoup plus petite que les rayons interne et externe du câble. Qu'en est-il des effets d'atténuation des modes dus aux pertes ohmiques? Quels sont les courants d'énergie électromagnétiques qui se manifestent dans une telle situation?

Solution :

Pour aborder ce problème il convient d'utiliser les coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) dont l'axe Oz coïncide avec l'axe du câble coaxial. On distinguera trois régions. La région $0 \leq \rho \leq b$ est occupée par un milieu conducteur. La région

$b \leq \rho \leq a$ est assimilable au vide et la région $a \leq \rho \leq +\infty$ est occupée par un milieu conducteur. Pour un rappel utile au sujet des modes $TM(0)$ il convient de se référer aux expressions qui figurent sous (6.146). Pour alléger l'écriture on supposera que $\mu = \mu_0$ et $\varepsilon = \varepsilon_0$. La conductivité des milieux conducteurs est notée σ .

Commençons par remarquer que les seules composantes non-nulles du champ électrique et du champ magnétique sont :

Pour la région $0 \leq \rho \leq b$

$$\begin{aligned} E'_\rho(\rho, \phi, z) &= \frac{\kappa'}{\sigma - i\omega\varepsilon_0} \frac{dy'(k'\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa'z) \\ E'_z(\rho, \phi, z) &= \frac{-(k')^2}{\sigma - i\omega\varepsilon_0} y'(k'\rho) \exp(i\kappa'z) \\ \check{H}'_\phi(\rho, \phi, z) &= \frac{dy'(k'\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa'z) \\ k' &= \sqrt{i\omega\mu_0(\sigma - i\omega\varepsilon_0) - (\kappa')^2} \end{aligned}$$

Pour la région $b \leq \rho \leq a$

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho, \phi, z) &= \frac{\kappa}{-i\omega\varepsilon_0} \frac{dy(k\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z) \\ E_z(\rho, \phi, z) &= \frac{-(k)^2}{-i\omega\varepsilon_0} y(k\rho) \exp(i\kappa z) \\ \check{H}_\phi(\rho, \phi, z) &= \frac{dy(k\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z) \\ k &= \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - (\kappa)^2} \end{aligned}$$

pour la région $a \leq \rho \leq +\infty$

$$\begin{aligned} E''_\rho(\rho, \phi, z) &= \frac{\kappa''}{\sigma - i\omega\varepsilon_0} \frac{dy''(k''\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa''z) \\ E''_z(\rho, \phi, z) &= \frac{-(k'')^2}{\sigma - i\omega\varepsilon_0} y''(k''\rho) \exp(i\kappa''z) \\ \check{H}''_\phi(\rho, \phi, z) &= \frac{dy''(k''\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa''z) \\ k'' &= \sqrt{i\omega\mu_0(\sigma - i\omega\varepsilon_0) - (\kappa'')^2} \end{aligned}$$

Les conditions aux limites sont les suivantes.

En $\rho = b$

$$\begin{aligned} (\sigma - i\omega\varepsilon_0) E'_\rho(b, \phi, z) &= (-i\omega\varepsilon_0) E_\rho(b, \phi, z) \\ E'_z(b, \phi, z) &= E_z(b, \phi, z) \\ \check{H}'_\phi(b, \phi, z) &= \check{H}_\phi(b, \phi, z) \end{aligned}$$

En $\rho = a$

$$\begin{aligned}(\sigma - i\omega\varepsilon_0) E_\rho''(a, \phi, z) &= (-i\omega\varepsilon_0) E_\rho(a, \phi, z) \\ E_z''(a, \phi, z) &= E_z(a, \phi, z) \\ \check{H}_\phi''(a, \phi, z) &= \check{H}_\phi(a, \phi, z)\end{aligned}$$

Parmi les premières conséquences immédiates de ces conditions aux limites figure les égalités

$$\kappa' = \kappa = \kappa'' \quad \text{et par conséquent} \quad k' = k'' = \sqrt{i\omega\mu_0(\sigma - i\omega\varepsilon_0) - \kappa^2}$$

Ensuite les conditions aux limites en $\rho = b$ et $\rho = a$ sont donc satisfaites si

$$\begin{aligned}\frac{dy'(k'\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho=b} &= \frac{dy(k\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho=b} \quad \text{et} \quad \frac{-(k')^2}{\sigma - i\omega\varepsilon_0} y'(k'b) = \frac{-(k)^2}{-i\omega\varepsilon_0} y(kb) \\ \frac{dy''(k'\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho=a} &= \frac{dy(k\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho=a} \quad \text{et} \quad \frac{-(k')^2}{\sigma - i\omega\varepsilon_0} y''(k'a) = \frac{-(k)^2}{-i\omega\varepsilon_0} y(ka)\end{aligned}$$

Les fonctions $y(x)$ sont des solutions de l'équation différentielle (6.144). L'absence de singularité en $\rho = 0$ et l'absence d'onde radiale entrante à l'infini $\rho \rightarrow +\infty$ impose que

$$y'(k'\rho) = u_0 J_0(k'\rho) \quad \text{et que} \quad y''(k'\rho) = u_0 C H_0^1(k'\rho)$$

Dans ces expressions le symbole u_0 désigne un facteur arbitraire. A l'intérieur du guide d'onde.

$$y(k\rho) = u_0 (A J_0(k\rho) + B Y_0(k\rho))$$

Finalement, l'ensemble des conditions aux limites conduit aux conditions suivantes pour les grandeurs A , B , C et κ .

$$\begin{aligned}k' \frac{dJ_0(x)}{dx}\Big|_{x=k'b} &= k \left(A \frac{dJ_0(x)}{dx} + B \frac{dY_0(x)}{dx} \right)\Big|_{x=kb} \\ k' C \frac{dH_0^1(x)}{dx}\Big|_{x=k'a} &= k \left(A \frac{dJ_0(x)}{dx} + B \frac{dY_0(x)}{dx} \right)\Big|_{x=ka} \\ \frac{-(k')^2}{\sigma - i\omega\varepsilon_0} J_0(k'b) &= \frac{-(k)^2}{-i\omega\varepsilon_0} (A J_0(kb) + B Y_0(kb)) \\ \frac{-(k')^2}{\sigma - i\omega\varepsilon_0} C H_0^1(k'a) &= \frac{-(k)^2}{-i\omega\varepsilon_0} (A J_0(ka) + B Y_0(ka))\end{aligned}$$

Considérons maintenant le rapport pris membre à membre des 1-ère et 3-ème équations puis des 2-ème et 4-ème équations qui constituent le système d'équations qui précède. Il vient

$$\frac{i \omega \varepsilon_0 - \sigma}{k'} \frac{1}{J_0(k'b)} \frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=k'b} = \frac{i \omega \varepsilon_0}{k} \frac{1}{A J_0(kb) + B Y_0(kb)}$$

$$\times \left(A \frac{dJ_0(x)}{dx} + B \frac{dY_0(x)}{dx} \right) \Big|_{x=kb}$$

et

$$\frac{i \omega \varepsilon_0 - \sigma}{k'} \frac{1}{H_0^1(k'a)} \frac{dH_0^1(x)}{dx} \Big|_{x=k'a} = \frac{i \omega \varepsilon_0}{k} \frac{1}{A J_0(ka) + B Y_0(ka)}$$

$$\times \left(A \frac{dJ_0(x)}{dx} + B \frac{dY_0(x)}{dx} \right) \Big|_{x=ka}$$

ou encore (équation (1))

$$\frac{i \omega \varepsilon_0 - \sigma}{i \omega \varepsilon_0} \frac{k}{k'} \frac{1}{J_0(k'b)} \frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=k'b} = \frac{1}{J_0(kb) + (B/A) Y_0(kb)}$$

$$\times \left(\frac{dJ_0(x)}{dx} + (B/A) \frac{dY_0(x)}{dx} \right) \Big|_{x=kb}$$

et (équation (2))

$$\frac{i \omega \varepsilon_0 - \sigma}{i \omega \varepsilon_0} \frac{k}{k'} \frac{1}{H_0^1(k'a)} \frac{dH_0^1(x)}{dx} \Big|_{x=k'a} = \frac{1}{J_0(ka) + (B/A) Y_0(ka)}$$

$$\times \left(\frac{dJ_0(x)}{dx} + (B/A) \frac{dY_0(x)}{dx} \right) \Big|_{x=ka}$$

Dans ces deux dernières équations seules figurent les grandeurs k et B/A puisque

$$k' = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2 + i \frac{\omega}{c^2} \tau} = \sqrt{k^2 + i \frac{\omega}{c^2} \tau} \quad \text{où} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$$

Ces équations en permettent donc la détermination.

Avant d'aborder cette question résolvons encore le système d'équations linéaires en A et B constitué par la 1-ère et de la 3-ème de ces équations. Ce système s'écrit

$$A \frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=kb} + B \frac{dY_0(x)}{dx} \Big|_{x=kb} = \frac{k'}{k} \frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=k'b}$$

$$A J_0(kb) + B Y_0(kb) = \frac{-i\omega\varepsilon_0}{\sigma - i\omega\varepsilon_0} \frac{(k')^2}{k^2} J_0(k'b)$$

et on en déduit aisément les expressions suivantes des coefficients A et B

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\pi k b}{-2} \left[\frac{k'}{k} \frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=k'b} Y_0(kb) + \frac{i\omega\varepsilon_0}{\sigma - i\omega\varepsilon_0} \frac{(k')^2}{k^2} J_0(k'b) \frac{dY_0(x)}{dx} \Big|_{x=kb} \right] \\
B &= \frac{\pi k b}{-2} \left[\frac{-i\omega\varepsilon_0}{\sigma - i\omega\varepsilon_0} \frac{(k')^2}{k^2} J_0(k'b) \frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=kb} - \frac{k'}{k} \frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=k'b} J_0(kb) \right]
\end{aligned}$$

car (voir sous *wronskien* à la fin de annexe H)

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=kb} Y_0(kb) - \frac{dY_0(x)}{dx} \Big|_{x=kb} J_0(kb) = \frac{-2}{\pi k b}$$

Pour la suite il est plus approprié de transcrire les expressions de ces coefficients sous la forme

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\pi k' b}{2} \frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=k'b} \left[\alpha \frac{dY_0(x)}{dx} \Big|_{x=kb} - Y_0(kb) \right] \\
B &= \frac{\pi k' b}{2} \frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=k'b} \left[J_0(kb) - \alpha \frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=kb} \right]
\end{aligned}$$

où nous l'on a posé

$$\alpha = \frac{-i\omega\varepsilon_0}{\sigma - i\omega\varepsilon_0} \frac{k'}{k} \frac{J_0(k'b)}{\frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=k'b}}$$

La grandeur τ introduite plus haut possède la dimension d'un temps. C'est, rappelons-le, un temps de relaxation qui tend à s'annuler lorsque la conductivité tend à devenir infinie. Il est maintenant temps de faire intervenir le fait que la conductivité σ du matériau conducteur est grande, donc que le temps de relaxation τ est petit. Par cela on entend plus précisément que l'on considère des fréquences telles que

$$\omega\tau \ll 1$$

Or

$$k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\left(1 - \frac{c^2 \kappa^2}{\omega^2}\right) + i \frac{i}{\omega\tau}} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1}{\omega\tau}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{\omega\tau}}$$

puisque $c\kappa < \omega$. Il faut ensuite faire intervenir le fait que la profondeur de pénétration du champ électromagnétique dans le milieu conducteur est petite par rapport aux dimensions du câble coaxial et donc que ces dimensions sont telles que

$$\text{Im}(k') a > \text{Im}(k') b \gg 1 \quad \text{c'est-à-dire que} \quad \frac{\omega}{c} \frac{a}{\sqrt{2} \omega\tau} > \frac{\omega}{c} \frac{b}{2 \sqrt{\omega\tau}} \gg 1$$

Autrement dit

$$a > b \gg \frac{c}{\omega} \sqrt{2 \omega\tau}$$

Dans ces conditions, compte tenu des relations (H.7) et compte tenu du comportement asymptotique (H.9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_0(x)} \frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=k'b} &= \frac{1}{H_0^1(x) + H_0^2(x)} \frac{d}{dx} \left(H_0^1(x) + H_0^2(x) \right) \Big|_{x=k'b} \\ &\cong -i \quad , \text{ lorsque } \text{Im}(k')b \gg 1 \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{H_0^1(x)} \frac{dH_0^1(x)}{dx} \Big|_{x=k'a} \cong i \quad , \text{ lorsque } \text{Im}(k')a \gg 1$$

Il est alors aisé de constater qu'en première approximation

$$\alpha \cong \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{k c} \sqrt{\omega\tau} \quad \text{et par conséquent} \quad |\alpha| \ll 1$$

Par ailleurs, dans le membre de gauche de l'équation (1)

$$\frac{i \omega \varepsilon_0 - \sigma}{i \omega \varepsilon_0} \frac{k}{k'} \frac{1}{J_0(k'b)} \frac{dJ_0(x)}{dx} \Big|_{x=k'b} \cong \frac{\sqrt{2}}{1+i} \frac{c k}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\omega\tau}} \cong \frac{1}{\alpha}$$

et dans le membre de gauche de l'équation (2)

$$\frac{i \omega \varepsilon_0 - \sigma}{i \omega \varepsilon_0} \frac{k}{k'} \frac{1}{H_0^1(k'a)} \frac{dH_0^1(x)}{dx} \Big|_{x=k'a} \cong -\frac{\sqrt{2}}{1+i} \frac{c k}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\omega\tau}} \cong -\frac{1}{\alpha}$$

Par conséquent, en première approximation (équation (3))

$$\frac{J_0(x) + (B/A) Y_0(x)}{\frac{dJ_0(x)}{dx} + (B/A) \frac{dY_0(x)}{dx}} \Big|_{x=kb} \cong \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{c k} \sqrt{\omega\tau} \cong \alpha$$

et (équation (4))

$$\frac{J_0(x) + (B/A) Y_0(x)}{\frac{dJ_0(x)}{dx} + (B/A) \frac{dY_0(x)}{dx}} \Big|_{x=ka} \cong -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{c k} \sqrt{\omega\tau} \cong -\alpha$$

Lorsque la conductivité σ est infinie, donc lorsque $\tau = 0$ alors $k = k_0$ et $B/A = \eta_0$. Dès lors

$$\begin{aligned} J_0(k_0 b) + \eta_0 Y_0(k_0 b) &= 0 \\ J_0(k_0 a) + \eta_0 Y_0(k_0 a) &= 0 \end{aligned}$$

Ce système d'équations possède une solution non-triviale si et seulement si

$$J_0(k_0 b) Y_0(k_0 a) - J_0(k_0 a) Y_0(k_0 b) = 0$$

et dans ce cas

$$\eta_0 = -\frac{J_0(k_0 b)}{Y_0(k_0 b)} = -\frac{J_0(k_0 a)}{Y_0(k_0 a)}$$

Lorsque la conductivité est grande on s'attend à des valeurs de k et de B/A proches de k_0 et de η_0 respectivement. Par conséquent posons

$$k = k_0 + \delta k \quad \text{et} \quad \frac{B}{A} = \eta_0 + \delta \eta$$

Il suit des équations (3) et (4) qu'à des contributions du second ordre près,

$$\begin{aligned} \left. \frac{Y_0(x)}{\frac{dJ_0(x)}{dx} + \eta_0 \frac{dY_0(x)}{dx}} \right|_{x=k_0 b} \delta \eta + \delta k b &\approx \alpha \\ \left. \frac{Y_0(x)}{\frac{dJ_0(x)}{dx} + \eta_0 \frac{dY_0(x)}{dx}} \right|_{x=k_0 a} \delta \eta + \delta k a &\approx -\alpha \end{aligned}$$

En effet, dans les équations (3) et (4), il faut retenir que la variation du dénominateur qui figure dans le membre de gauche apporte une contribution du second ordre car le numérateur apporte lui, une contribution du premier ordre comme le montre le développement qui suit ainsi que le correspondant de ce dernier lorsque a est remplacé par b .

$$\begin{aligned} &J_0(ka) + (B/A) Y_0(ka) \\ = &J_0(k_0 a) + \delta k a \frac{dJ_0(k_0 a)}{dx} + \eta_0 Y_0(k_0 a) + \delta \eta_0 Y_0(k_0 a) + \delta k a \eta_0 \frac{Y_0(k_0 a)}{dx} \\ = &\delta \eta_0 Y_0(k_0 a) + \delta k a \left(\frac{dJ_0(k_0 a)}{dx} + \eta_0 \frac{Y_0(k_0 a)}{dx} \right) \end{aligned}$$

Pour être en mesure de conclure il faut encore faire usage des relations que voici

$$\begin{aligned} \left. \frac{Y_0(x)}{\frac{dJ_0(x)}{dx} + \eta_0 \frac{dY_0(x)}{dx}} \right|_{x=k_0 b} &= \frac{Y_0(x)^2}{\frac{Y_0(x)}{dx} \frac{dJ_0(x)}{dx} - J_0(x) \frac{dY_0(x)}{dx}} \Big|_{x=k_0 b} \\ &= -\frac{\pi x Y_0(x)^2}{2} \Big|_{x=k_0 b} \end{aligned}$$

et similairement

$$\left. \frac{Y_0(x)}{\frac{dJ_0(x)}{dx} + \eta_0 \frac{dY_0(x)}{dx}} \right|_{x=k_0 a} = -\frac{\pi x Y_0(x)^2}{2} \Big|_{x=k_0 a}$$

Par conséquent, finalement

$$\delta \eta = \frac{2 \alpha a + b}{\pi k_0 a b} \frac{1}{Y_0(k_0 a)^2 - Y_0(k_0 b)^2}$$

et

$$\delta k = \frac{\alpha}{a b} \frac{a Y_0(k_0 a)^2 + b Y_0(k_0 b)^2}{Y_0(k_0 a)^2 - Y_0(k_0 b)^2}$$

ou encore, puisque $Y_0(k_0 a)/Y_0(k_0 b) = J_0(k_0 a)/J_0(k_0 b)$, on peut écrire

$$\delta k \approx -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{k_0 c} \sqrt{\omega\tau} \frac{1}{a} \frac{1 + (a J_0(k_0 a)^2)/(b J_0(k_0 b)^2)}{1 - (J_0(k_0 a)^2)/(J_0(k_0 b)^2)}$$

De ce résultat il découle que

$$\begin{aligned} \kappa &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - (k_0 + \delta k)^2} \approx \kappa_0 \sqrt{1 - \frac{2 k_0 \delta k}{\kappa_0^2}} \\ &\approx \kappa_0 \left(1 - \frac{k_0 \delta k}{\kappa_0^2}\right) = \kappa_0 - \frac{k_0}{\kappa_0} \delta k = \kappa_0 + \delta \kappa \end{aligned}$$

Dans cette expression on a posé

$$\kappa_0 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_0^2} \quad \text{et} \quad \delta \kappa = -\frac{k_0}{\kappa_0} \delta k$$

Par conséquent

$$\delta \kappa = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{\kappa_0 c} \sqrt{\omega\tau} \frac{1}{a} \frac{1 + (a J_0(k_0 a)^2)/(b J_0(k_0 b)^2)}{1 - (J_0(k_0 a)^2)/(J_0(k_0 b)^2)}$$

VOICI QUELQUES QUESTIONS INTERESSANTES QUI RESTENT EN SUSPEND :

1. Amortissement des signaux dans la direction z ?
2. $A_0 + \delta A$ et $B_0 + \delta B$?
3. Limite $a \gg b$?
4. Courant radial d'énergie. Energie dissipée par unité de longueur ?
5. Impédance du câble coaxial ?

Chapitre 7

Solutions des exercices du chapitre 7

Exercice 7.1

On considère une antenne, placée dans le vide, formée de deux sphères métalliques parfaitement conductrices de mêmes rayons a séparées par une distance $d \gg 2a$. Ces deux sphères constituent un condensateur de capacité C dont les deux pôles sont soumis à une différence de potentiel alternative $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ de pulsation ω telle que la longueur d'onde des ondes produites en régime permanent est beaucoup plus grande que les dimensions de l'antenne ainsi constituée.

1. A chaque instant la charge électrique totale du condensateur est nulle. Calculer la puissance rayonnée par cette antenne si l'on suppose, en première approximation, que la charge attachée à l'un des pôles du condensateur vaut $Q(t) = C U(t)$.
2. Le rayonnement produit par l'antenne donne lieu à une composante résistive pour l'impédance de celle-ci. Partant de cette remarque déterminer, en première approximation, l'impédance de l'antenne.
3. Expliquer pour quelles raisons la mention, *en première approximation*, intervient dans les propos qui précèdent. Comment peut-on effectuer une première correction des résultats acquis ?

Solution :

$$Q(t) = C U_0 \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad p(t) = d Q(t) \sin(\omega t) = p_0 \sin(\omega t) \quad \text{où} \quad p_0 = d C U_0$$

Il suit de (7.21) que la puissance instantanée rayonnée vaut

$$\dot{W}(t) = \frac{1}{6\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{p_0^2}{c^2} \omega^4 \sin(\omega t)^2$$

En valeur moyenne au cours du temps cette puissance vaut donc

$$\overline{W} = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{W}(t) dt = \frac{1}{12\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{p_0^2}{c^2} \omega^4 \quad \text{où } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Cette puissance moyenne dissipée peut être assimilée à une puissance ohmique moyenne

$$\overline{W} = \frac{1}{T} \int_0^T R(\omega) \frac{I(t)^2}{2} dt = R(\omega) \frac{C^2 U_0^2 \omega^2}{4}$$

puisque

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C U_0 \omega \cos(\omega t)$$

Par conséquent,

$$R(\omega) = \frac{1}{3\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\omega^2 d^2}{c^2} = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{d^2}{\lambda^2}$$

Dans cette dernière expression le symbole λ désigne la longueur d'onde $2\pi c/\omega$ du rayonnement émis. Rappelons que selon nos hypothèses $d \ll \lambda$.

Les raisons pour lesquelles la mention *en première approximation* intervient dans l'énoncé du problème posé résident dans le fait qu'en raison de la perte d'énergie due au rayonnement émis le comportement du condensateur ne peut pas être purement capacitif. Cette perte d'énergie doit alors se traduire par une composante résistive dans l'impédance de l'antenne. Une première correction des résultats acquis précédemment consiste donc à faire intervenir dans l'impédance de l'antenne une composante résistive à laquelle correspondent des pertes moyennes d'énergie par unité de temps qui coïncident avec l'énergie rayonnée par l'antenne, en moyenne par unité de temps. Cette approche est bien entendu d'autant plus justifiée que la valeur de cette résistance fictive est faible comparée à l'impédance du condensateur. Cette condition détermine donc le domaine de validité de l'approximation effectuée. Cette condition, comme nous allons le constater plus loin, fixe un domaine de pulsation dans lequel l'approche évoquée plus haut est justifiée.

En première approximation l'impédance de l'antenne peut s'écrire

$$Z(\omega) = R(\omega) + \frac{1}{i \omega C}$$

où le symbole $R(\omega)$ est une résistance fictive en série qui simule l'influence moyenne du rayonnement émis. Une première correction consiste à déterminer la charge du condensateur au cours du temps, compte tenu de l'influence de cette résistance fictive due à l'émission du rayonnement. On a

$$R(\omega) I(t) + \frac{Q(t)}{C} = U_0 \sin(\omega t)$$

En régime permanent

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta) \quad \text{où } \tan \delta = \omega R(\omega) C \quad \text{et } I_0 = \frac{\omega C}{\sqrt{1 + \omega^2 R(\omega)^2 C^2}} U_0$$

Dans ces conditions

$$Q(t) = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t - \delta) = \frac{C}{\sqrt{1 + \omega^2 R(\omega)^2 C^2}} U_0 \sin(\omega t - \delta)$$

et par conséquent, pour évaluer la puissance moyenne corrigée, du rayonnement émis il suffit de remplacer p_0 par p_1 donné par

$$p_1 = \frac{d C U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R(\omega)^2 C^2}} = \frac{p_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R(\omega)^2 C^2}}$$

Le domaine de pulsation adapté à l'approximation qui vient d'être effectuée est donc dicté par la condition

$$R(\omega) \ll \frac{1}{\omega C} \quad \text{autrement dit} \quad \omega^3 \ll \frac{3\pi}{C} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{c^2}{d^2}$$

sans oublier la condition

$$d \ll \lambda = 2\pi \frac{c}{\omega} \quad \text{donc} \quad \omega \ll 2\pi \frac{c}{d}$$

Exercice 7.2

Mêmes questions que dans l'exercice 7.1, mais cette fois l'antenne est constituée d'une spire circulaire parfaitement conductrice de rayon a et de coefficient d'auto-induction L alimentée en tension alternative $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ de pulsation ω telle que la longueur d'onde des ondes produites en régime permanent est beaucoup plus grande que les dimensions de l'antenne ainsi constituée.

1. Calculer la puissance rayonnée par cette antenne si l'on suppose, en première approximation, que l'intensité du courant qui la parcourt vaut $I(t) = U_0 \sin(\omega t)/(\omega L)$.
2. Le rayonnement produit par l'antenne donne lieu à une composante résistive pour l'impédance de celle-ci. Partant de cette remarque déterminer, en première approximation, l'impédance de l'antenne.
3. Expliquer pour quelles raisons la mention, *en première approximation*, intervient dans les propos qui précèdent. Comment peut-on effectuer une première correction des résultats acquis?

Solution :

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega L} \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \check{m}(t) = \check{m}_0 \sin(\omega t) \quad \text{où} \quad \check{m}_0 = \frac{\pi a^2 U_0}{\omega L}$$

Il suit de (7.17) que la puissance instantanée rayonnée vaut

$$\dot{W}(t) = \frac{1}{6\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\check{m}_0^2}{c^4} \omega^4 \sin^2(\omega t)$$

En valeur moyenne au cours du temps cette puissance vaut donc

$$\overline{\dot{W}} = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{W}(t) dt = \frac{1}{12\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\check{m}_0^2}{c^4} \omega^4 \quad \text{où } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Cette puissance moyenne dissipée peut être assimilée à une puissance ohmique moyenne

$$\overline{\dot{W}} = \frac{1}{T} \int_0^T R(\omega) \frac{I(t)^2}{2} dt = R(\omega) \frac{U_0^2}{4 \omega^2 L^2}$$

puisque

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega L} \sin(\omega t)$$

Par conséquent

$$R(\omega) = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{a^4}{c^4} \omega^4 = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{a}{\lambda} \right)^4$$

Dans cette expression le symbole λ désigne la longueur d'onde $2\pi c/\omega$ du rayonnement émis. Rappelons que selon nos hypothèses $a \ll \lambda$.

Les raisons pour lesquelles la mention *en première approximation* intervient dans l'énoncé du problème posé résident dans le fait qu'à cause de la perte d'énergie due au rayonnement émis le comportement de la spire ne peut pas être purement inductif. Cette perte d'énergie doit alors se traduire par une composante résistive dans l'impédance de l'antenne. Une première correction des résultats acquis précédemment consiste donc à faire intervenir dans l'impédance de l'antenne une composante résistive à laquelle correspondent des pertes moyennes d'énergie par unité de temps qui coïncident avec l'énergie rayonnée par l'antenne, en moyenne par unité de temps. Cette démarche est bien entendu d'autant plus justifiée que la valeur de cette résistance fictive est faible comparée à l'impédance de la spire. De cette dernière condition résulte un domaine de validité de l'approximation. Comme nous allons le constater cette condition fixe un domaine de pulsation dans lequel l'approche évoquée précédemment est s'appliquable.

En première approximation l'impédance de l'antenne peut s'écrire

$$Z(\omega) = R(\omega) + i \omega L \quad (\text{résistance en série et en valeur moyenne})$$

où le symbole $R(\omega)$ est une résistance fictive en série qui simule l'influence moyenne du rayonnement émis. Une première correction consiste donc à déterminer l'intensité du courant compte tenu de l'influence de cette résistance fictive due à l'émission du rayonnement. On a

$$R(\omega) I(t) + L \frac{dI(t)}{dt} = U_0 \cos(\omega t)$$

En régime permanent de pulsation ω il vient

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \delta) \quad \text{où } \tan \delta = \frac{-R(\omega)}{\omega L} \quad \text{et } I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R(\omega)^2}}$$

Dans ces conditions

$$\check{m}_1 = \frac{\pi a^2}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R(\omega)^2}} U_0 = \frac{\omega L}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R(\omega)^2}} \check{m}_0$$

Le domaine de pulsation adapté à l'approximation qui vient d'être effectuée est donc dicté par la condition

$$R(\omega) \ll \omega L \quad \text{autrement dit} \quad \omega^3 \ll \frac{3}{\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} L \left(\frac{c}{a}\right)^4$$

sans oublier la condition

$$a \ll \lambda = 2\pi \frac{c}{\omega} \quad \text{ou encore} \quad \omega \ll 2\pi \frac{c}{a}$$

Exercice 7.3

On considère milieu matériel dont le comportement électrique peut être assimilé à celui d'une distribution uniforme, de densité ρ_0 , de moments dipolaires électriques induits par le champ électrique local $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{x}, t)$ et présentant une résonance de pulsation ω_0 . Si on néglige l'influence dissipative due au rayonnement produit par ces dipôles, l'équation qui gouverne l'évolution de chaque dipôle électrique $\mathbf{p}(t)$ (situé en \mathbf{x}) s'écrit

$$\frac{d^2 \mathbf{p}(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{p}(t) = \alpha \omega_0^2 \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{x}, t)$$

La constante $\alpha > 0$ désigne la polarisabilité statique du milieu. En absence de champ électrique extérieur $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{x}, t)$ l'énergie d'un dipôle s'écrit

$$E_{\text{dipôle}}(t) = \frac{E_0}{\omega_0^2 p_0^2} \left[\frac{\dot{\mathbf{p}}(t)^2 + \omega_0^2 \mathbf{p}(t)^2}{2} \right]$$

Dans cette expression les symboles E_0 et p_0 désignent des constantes physiques.

1. Montrer qu'en absence de champ électrique extérieur, et compte tenu de l'influence du rayonnement produit par le dipôle, la dérivée par rapport au temps de l'énergie du dipôle a pour valeur

$$\frac{dE_{\text{dipôle}}(t)}{dt} = -\frac{1}{6\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t)^2}{c^2}$$

puis en déduire que

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{E_0}{\omega_0^2 p_0^2} \left[\frac{\dot{\mathbf{p}}(t)^2 + \omega_0^2 \mathbf{p}(t)^2}{2} \right] + \frac{1}{6\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t)}{c^2} \right\} = \frac{1}{6\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t)}{c^2}$$

2. Introduire la grandeur suivante qui a la dimension d'un temps

$$\tau = \frac{\omega_0^2 p_0^2}{E_0 c^2} \frac{1}{6\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

puis déduire de l'équation qui figure sous 1) que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{(\dot{\mathbf{p}}(t) + \tau \ddot{\mathbf{p}}(t))^2}{2} + \frac{\omega_0^2 \mathbf{p}(t)^2 - \tau^2 \ddot{\mathbf{p}}(t)^2}{2} \right] = \tau \dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t)$$

Ensuite montrer qu'en première approximation

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{(\dot{\mathbf{p}}(t) - \omega_0^2 \tau \mathbf{p}(t))^2}{2} + \frac{\omega_0^2 \mathbf{p}(t)^2 - \tau^2 \omega_0^4 \mathbf{p}(t)^2}{2} \right] = -\omega_0^2 \tau \dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t)$$

et que finalement

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\mathbf{p}}(t)^2}{2} + \frac{\omega_0^2 \mathbf{p}(t)^2}{2} \right] = -\omega_0^2 \tau \dot{\mathbf{p}}(t)^2$$

Montrer enfin qu'en première approximation l'évolution libre du dipôle électrique qui rayonne est régie par l'équation différentielle du second ordre

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) + \omega_0^2 \mathbf{p}(t) + \omega_0^2 \tau \dot{\mathbf{p}}(t) = 0$$

3. Montrer qu'en présence d'un champ électrique extérieur, l'évolution du dipôle électrique induit est gouvernée par l'équation

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) + \omega_0^2 \mathbf{p}(t) + \omega_0^2 \tau \dot{\mathbf{p}}(t) = \alpha \omega_0^2 \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{x}, t)$$

4. Montrer que soumis à l'influence d'un champ électrique extérieur de pulsation ω l'évolution du dipôle en régime permanent est de la forme

$$\mathbf{p}(t) = \text{Re} \left[\frac{-\alpha \omega_0^2 \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)}{\omega^2 + i \omega_0^2 \tau \omega - \omega_0^2} \right]$$

lorsque $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{x}, t) \equiv \text{Re} [\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)]$

5. Quelle est l'allure de la susceptibilité électrique $\chi_E^P(t)$ du milieu formé de tels dipôles électriques ?

Indications : Pour traiter cet exercice il est utile de se référer au résultat (7.21). En outre, l'influence dynamique dissipative due au rayonnement est faible en regard de la "force de rappel" $-\omega_0^2 \mathbf{p}(t)$ de l'oscillateur si bien qu'en première approximation on peut supposer que

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) \approx -\omega_0^2 \mathbf{p}(t) \quad , \quad \ddot{\dot{\mathbf{p}}}(t) \approx -\omega_0^2 \dot{\mathbf{p}}(t) \quad \text{et} \quad \omega_0 \tau \ll 1$$

Solution :

1. L'équation

$$\frac{dE_{\text{dipôle}}(t)}{dt} = -\frac{1}{6\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t)^2}{c^2}$$

est une conséquence immédiate du résultat (7.21) et, compte tenu de l'expression de l'énergie du dipôle, on peut immédiatement en déduire la relation

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{E_0}{\omega_0^2 p_0^2} \left[\frac{\dot{\mathbf{p}}(t)^2 + \omega_0^2 \mathbf{p}(t)^2}{2} \right] + \frac{1}{6\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t)}{c^2} \right\} = \frac{1}{6\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t)}{c^2}$$

puisque

$$\ddot{\mathbf{p}}(t)^2 = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t)) - \dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t)$$

2. L'introduction de la grandeur τ dans le bilan d'énergie établi sous 1) permet de transcrire ce bilan sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\mathbf{p}}(t)^2 + \omega_0^2 \mathbf{p}(t)^2}{2} + \tau \dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t) \right] = \tau \dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t)$$

après simplification de l'équation par élimination du facteur $E_0/\omega_0^2 p_0^2$. Ensuite, il est aisé de transcrire l'équation qui précède sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{(\dot{\mathbf{p}}(t) + \tau \ddot{\mathbf{p}}(t))^2}{2} + \frac{\omega_0^2 \mathbf{p}(t)^2 - \tau^2 \ddot{\mathbf{p}}(t)^2}{2} \right] = \tau \dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t)$$

Si, en première approximation, on suppose que le freinage dû au rayonnement a une faible influence dynamique alors le comportement dynamique du dipôle est proche de celui d'un oscillateur harmonique libre, autrement dit on peut supposer qu'à chaque instant

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) \cong -\omega_0^2 \mathbf{p}(t) \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{p}}(t) \cong -\omega_0^2 \dot{\mathbf{p}}(t)$$

Dans ces conditions il découle de l'équation qui précède que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{(\dot{\mathbf{p}}(t) - \omega_0^2 \tau \mathbf{p}(t))^2}{2} + \frac{\omega_0^2 \mathbf{p}(t)^2 - \tau^2 \omega_0^4 \mathbf{p}(t)^2}{2} \right] = -\omega_0^2 \tau \dot{\mathbf{p}}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t)$$

Autrement dit

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\mathbf{p}}(t)^2 - 2 \omega_0^2 \tau \mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t) + \omega_0^2 \mathbf{p}(t)^2}{2} \right] = -\omega_0^2 \tau \dot{\mathbf{p}}(t)^2$$

Mais le terme en $-2 \omega_0^2 \tau \mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{p}}(t)$ qui figure dans le membre de droite est associé au rayonnement de freinage et il apporte une contribution dynamique négligeable comparée à celle des autres termes si bien qu'on peut finalement écrire

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\mathbf{p}}(t)^2 + \omega_0^2 \mathbf{p}(t)^2}{2} \right] = -\omega_0^2 \tau \dot{\mathbf{p}}(t)^2$$

De ce dernier résultat on peut immédiatement déduire l'équation que voici,

$$\left[\ddot{\mathbf{p}}(t) + \omega_0^2 \mathbf{p}(t) + \omega_0^2 \tau \dot{\mathbf{p}}(t) \right] \cdot \dot{\mathbf{p}}(t) = 0$$

Enfin dans la mesure où on se limite à un comportement oscillatoire on peut en conclure que l'évolution est régie par l'équation

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) + \omega_0^2 \mathbf{p}(t) + \omega_0^2 \tau \dot{\mathbf{p}}(t) = 0$$

3. Il suffit de considérer la situation où le système est statique pour en conclure que l'évolution du système en présence d'un champ électrique extérieur est gouvernée par l'équation

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) + \omega_0^2 \mathbf{p}(t) + \omega_0^2 \tau \dot{\mathbf{p}}(t) = \alpha \omega_0^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$$

dans laquelle le symbole \mathbf{x} caractérise la position du dipôle électrique.

4. Lorsque

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \right]$$

il convient d'exprimer le moment dipolaire électrique en régime permanent sous la forme

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{p}(\omega) \exp(-i\omega t) \right]$$

Dans ces conditions il suit immédiatement de l'équation d'évolution établie sous 3) que

$$-\omega^2 \mathbf{p}(\omega) + \omega_0^2 \mathbf{p}(\omega) - i \omega \omega_0^2 \tau \mathbf{p}(\omega) = \alpha \omega_0^2 \mathbf{E}_0$$

Par conséquent,

$$\mathbf{p}(\omega) = \frac{-\alpha \omega_0^2 \mathbf{E}_0}{\omega^2 - \omega_0^2 + i \omega \omega_0^2 \tau}$$

et en régime permanent

$$\mathbf{p}(t) = \text{Re} \left[\frac{-\alpha \omega_0^2 \mathbf{E}_0}{\omega^2 - \omega_0^2 + i \omega \omega_0^2 \tau} \exp(-i\omega t) \right]$$

5. Rappelons les expressions du champ électrique, de la polarisation électrique et du moment dipolaire à partir des transformées de Fourier par rapport au temps de ces dernières grandeurs.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\ \mathbf{p}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{p}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega\end{aligned}$$

Soulignons encore que la polarisations du milieu est fournie par l'expression

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \rho_0 \mathbf{p}(t)$$

dans laquelle le symbole ρ_0 correspond à la densité de dipôles électriques du milieu. Lorsque, dans l'équation d'évolution sous établie sous 3) on exprime le champ électrique et du moment dipolaire électrique à l'aide des transformées de Fourier par rapport au temps de ces grandeurs on parvient à la relation

$$[\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0^2\tau] \mathbf{p}(\omega) = -\alpha\omega_0^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$$

Grâce à cette relation on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) &= \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{p}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\ &= \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\alpha\omega_0^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0^2\tau} \exp(-i\omega t) d\omega \\ &= \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\alpha\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0^2\tau} \\ &\quad \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t') \exp(i\omega t') dt' \right) \exp(-i\omega t) d\omega \\ &\equiv \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_E^P(\mathbf{x}, t-t') \mathbf{E}(\mathbf{x}, t') dt'\end{aligned}$$

où

$$\chi_E^P(t-t') = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\alpha\omega_0^2 \rho_0}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0^2\tau} \exp(-i\omega(t-t')) d\omega$$

Pour déterminer l'expression de la fonction $\chi_E^P(t-t')$ on procède comme suit

$$\begin{aligned} \chi_E^P(t-t') &= \frac{\alpha \omega_0 \rho_0}{2 \varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(-i\omega(t-t')) \\ &\times \left[\frac{1}{\omega + \omega_0(1 + i\omega_0\tau/2)} - \frac{1}{\omega - \omega_0(1 - i\omega_0\tau/2)} \right] \\ &= \frac{2 \pi \alpha \omega_0 \rho_0}{\varepsilon_0} \begin{cases} \sin(\omega_0(t-t')) \exp(-\omega_0^2\tau(t-t')/2) & \text{lorsque } t-t' > 0 \\ 0 & \text{lorsque } t-t' < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, finalement

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi_E^P(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{x}, t') dt'$$

et la susceptibilité électrique cherchée est de la forme

$$\chi_E^P(t-t') = \frac{2 \pi \alpha \omega_0 \rho_0}{\varepsilon_0} \theta(t-t') \sin(\omega_0(t-t')) \exp(-\omega_0^2\tau(t-t')/2)$$

Dans cette dernière expression le symbole $\theta(\dots)$ désigne la fonction de Heavyside.

Exercice 7.4

On considère une situation semblable à celle qui est traitée à la sous-section 7.2.6, mais cette fois le porteur de la charge électrique Q , de masse m subit l'influence d'un champ d'induction extérieur uniforme et constant dans le temps $\check{\mathbf{B}}_0$ dont l'effet s'ajoute à celui de l'onde électromagnétique plane et monochromatique de vecteur d'onde \mathbf{k} et de pulsation $\omega = c\|\mathbf{k}\|$. Le système est rendu électriquement neutre par la présence d'une charge électrique immobile de valeur $-Q$.

On considère la situation dans laquelle l'orientation du champ d'induction $\check{\mathbf{B}}_0$ est identique à celle du vecteur d'onde \mathbf{k} . En outre, comme à la sous-section 7.2.6, il est supposé que la vitesse avec laquelle se meut la charge est à chaque instant très inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide. On discutera seulement les deux cas dans lesquels l'onde incidente est polarisée linéairement puis circulairement.

1. Déterminer le mouvement périodique du porteur de charge *en négligeant l'influence du champ d'induction associé à l'onde incidente*. (voir développements de (7.23) à (7.25))
2. Déterminer le champ électromagnétique rayonné lorsque la longueur d'onde du rayonnement émis est beaucoup plus grande que le déplacement du porteur de charge.
3. Discuter de manière qualitative l'influence du champ d'induction extérieur $\check{\mathbf{B}}_0$ sur la "structure" du rayonnement émis.

4. Si un phénomène de résonance apparaît pour une certaine pulsation $\omega = \omega_0$ qu'est-ce qui limite l'amplitude des oscillations de la charge électrique Q , plus précisément quelle est, en première approximation, la largeur de raie de cette résonance.

Indications : Lorsque le mouvement oscillatoire de la charge électrique Q est déterminé en négligeant l'influence dynamique du rayonnement qu'elle produit et que le champ électrique et le champ d'induction rayonnés (fournis par les expressions (7.11) et (7.12)) sont déterminés discuter la polarisation de l'onde émise dans trois directions orthogonales l'une étant celle fournie par le vecteur d'onde de l'onde incidente. Les deux autres directions seront choisies de manière appropriée en fonction de la polarisation de l'onde incidente.

Solution :

Lorsque l'influence du rayonnement est négligée l'évolution du système est gouvernée par l'équation bien connue

$$m \ddot{\mathbf{y}}(t) = Q [\mathbf{E}(\mathbf{0}, t) + \dot{\mathbf{y}}(t) \wedge \check{\mathbf{B}}_0]$$

Soient \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 deux vecteurs orthonormés orthogonaux au vecteur d'onde \mathbf{k} et soit le vecteur unité \mathbf{e}_3 tel que $\mathbf{k} = \|\mathbf{k}\| \mathbf{e}_3$. Ainsi

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk} \quad , \forall j, k = 1, 2, 3$$

Le système de coordonnées cartésiennes adopté est orienté à droite. Posons

$$\check{\mathbf{B}}_0 = B_0 \check{\mathbf{e}}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{y}(t) = y^1(t) \mathbf{e}_1 + y^2(t) \mathbf{e}_2 + y^3(t) \mathbf{e}_3$$

La composante $y^3(t)$ décrit le mouvement dans la direction du vecteur d'onde \mathbf{k} de l'onde plane incidente et les composantes $y^1(t)$ et $y^2(t)$ décrivent le mouvement dans la direction perpendiculaire à ce vecteur d'onde et perpendiculaire au champ d'induction extérieur $\check{\mathbf{B}}_0$. L'équation d'évolution qui précède peut être écrite

$$m (\ddot{y}^1(t) \mathbf{e}_1 + \ddot{y}^2(t) \mathbf{e}_2 + \ddot{y}^3(t) \mathbf{e}_3) = Q (E^1(\mathbf{0}, t) \mathbf{e}_1 + E^2(\mathbf{0}, t) \mathbf{e}_2) + Q \check{B}_0 (\dot{y}^1(t) \mathbf{e}_1 \wedge \check{\mathbf{e}}_3 + \dot{y}^2(t) \mathbf{e}_2 \wedge \check{\mathbf{e}}_3)$$

Rappelons encore que

$$\mathbf{e}_1 \wedge \check{\mathbf{e}}_3 = -\mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_2 \wedge \check{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_1$$

En termes de composantes l'équation d'évolution qui précède s'écrit

$$\begin{aligned} \ddot{y}^1(t) &= \frac{Q}{m} E^1(\mathbf{0}, t) + \omega_0 \dot{y}^2(t) \\ \ddot{y}^2(t) &= \frac{Q}{m} E^2(\mathbf{0}, t) - \omega_0 \dot{y}^1(t) \\ \ddot{y}^3(t) &= 0 \end{aligned}$$

Dans ces équations on a posé

$$\omega_0 = \frac{Q \check{B}_0}{m}$$

Adoptons les conventions d'écriture décrite en (6.14). Selon celles-ci

$$\mathbf{E}(\mathbf{0}, t) = \mathcal{E}_r \cos(\omega t) + \mathcal{E}_i \sin(\omega t)$$

Nous voulons considérer l'évolution du système en régime permanent. La composante $y^3(t)$ n'est pas couplées aux autres composantes et pour la suite il convient de poser

$$y^j(t) = A^j \cos(\omega t) + B^j \sin(\omega t) \quad , \quad j = 1, 2 \quad \text{et} \quad y^3(t) \equiv 0$$

Après remplacement dans les équations d'évolution et identification des termes en $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ on obtient les relations que voici

$$-\omega^2 A^1 = \frac{Q}{m} \mathcal{E}_r^1 + \omega_0 \omega B^2 \quad , \quad -\omega^2 B^2 = \frac{Q}{m} \mathcal{E}_i^2 + \omega_0 \omega A^1$$

et

$$-\omega^2 B^1 = \frac{Q}{m} \mathcal{E}_i^1 - \omega_0 \omega A^2 \quad , \quad -\omega^2 A^2 = \frac{Q}{m} \mathcal{E}_r^2 - \omega_0 \omega B^1$$

d'où

$$A^1 = -\frac{Q}{m} \frac{\omega \mathcal{E}_r^1 - \omega_0 \mathcal{E}_i^2}{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad , \quad B^2 = -\frac{Q}{m} \frac{\omega \mathcal{E}_i^2 - \omega_0 \mathcal{E}_r^1}{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

et

$$B^1 = -\frac{Q}{m} \frac{\omega \mathcal{E}_i^1 + \omega_0 \mathcal{E}_r^2}{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad , \quad A^2 = -\frac{Q}{m} \frac{\omega \mathcal{E}_r^2 + \omega_0 \mathcal{E}_i^1}{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

Remarque : Dans les dénominateurs des expressions ci-dessus le facteur en $\omega^2 - \omega_0^2$ marque l'existence de *phénomènes de résonance* à la pulsation $\omega = \omega_0$. C'est le rayonnement qui leur confère une largeur de raie non-nulle. L'émission de rayonnement fait apparaître, en première approximation, un terme dissipatif qui agit comme un terme de "frottement" dans l'équation d'évolution de la charge.

Intéressons-nous maintenant au rayonnement produit par le mouvement de la charge électrique. Deux situations distinctes nous intéressent. Celle où l'onde plane incidente est polarisée linéairement et celle où l'onde plane incidente est polarisée circulairement.

L'onde plane incidente est polarisée linéairement. Dans ce cas on peut, sans perte de généralité, faire les hypothèses suivantes

$$\mathcal{E}_i^1 = \mathcal{E}_r^2 = \mathcal{E}_i^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad B^1 = A^2 = 0$$

$$A^1 = -\frac{Q}{m} \frac{\mathcal{E}_r^1}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad B^2 = +\frac{Q}{m} \frac{\omega_0 \mathcal{E}_r^1}{\omega (\omega^2 - \omega_0^2)}$$

Appliquons les formules (7.11) et (7.12). Posons $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$. Compte tenu de la relation bien connue (5.13) il vient

$$\mathbf{E}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge \ddot{\mathbf{p}}(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{m} \frac{\mathcal{E}_r^1}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$\times \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge \left[\mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge \left[\omega \cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \mathbf{e}_1 - \omega_0 \sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \mathbf{e}_2 \right] \right]}{\|\mathbf{x}\|}$$

et

$$\check{\mathbf{B}}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{E}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t)}{c}$$

Puisque le rayonnement émis est périodique dans le temps, de pulsation ω , et dans la mesure où l'on s'intéresse uniquement au rayonnement émis à une grande distance choisie une fois pour toute l'effet de retard associé au terme $\|\mathbf{x}\|/c$ se traduit par un déphasage dans le temps fixe pour les champs électrique et d'induction. Par conséquent l'influence de ce déphasage ne joue aucun rôle par rapport la polarisation de l'onde émise par la charge en mouvement oscillatoire.

Considérons trois directions orthogonales pour le rayonnement émis.

Lorsque $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \parallel \mathbf{k}$ donc $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_3$

$$\mathbf{E}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{m} \frac{\mathcal{E}_r^1}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$\times \frac{-\omega \cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \mathbf{e}_1 - \omega_0 \sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \mathbf{e}_2}{\|\mathbf{x}\|}$$

Dans cette direction le rayonnement est polarisé elliptiquement dans la mesure où le champ d'induction $\check{\mathbf{B}}_0$ est non-nul. Autrement ce rayonnement est polarisé linéairement selon \mathbf{e}_1 .

Lorsque $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_1$.

$$\mathbf{E}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{m} \frac{\mathcal{E}_r^1}{\omega^2 - \omega_0^2} \frac{\omega_0 \sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \mathbf{e}_2}{\|\mathbf{x}\|}$$

Le rayonnement émis dans cette direction est polarisé linéairement selon \mathbf{e}_2 et l'intensité de ce rayonnement est non-nul si et seulement si le champ d'induction $\check{\mathbf{B}}_0$ est non-nul.

Lorsque $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_2$.

$$\mathbf{E}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{m} \frac{\mathcal{E}_r^1}{\omega^2 - \omega_0^2} \frac{-\omega \cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{e}_1$$

Le rayonnement émis dans cette direction est polarisé linéairement selon \mathbf{e}_1 et l'intensité de ce rayonnement dépend du champ d'induction $\check{\mathbf{B}}_0$ au travers de la pulsation ω_0 .

L'onde plane incidente est polarisée circulairement. Dans ce cas on peut, sans perte de généralité, faire les hypothèses suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r^1 = \pm \mathcal{E}_i^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_r^2 = \mathcal{E}_i^1 = 0 \quad \text{d'où} \quad A^2 = B^1 = 0 \\ A^1 = -\frac{Q}{m} \frac{\mathcal{E}_r^1}{\omega (\omega \mp \omega_0)} \quad \text{et} \quad B^2 = -\frac{Q}{m} \frac{\pm \mathcal{E}_r^1}{\omega (\omega \mp \omega_0)} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge \dot{\mathbf{p}}(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q}{m} \frac{\omega \mathcal{E}_r^1}{\omega \mp \omega_0} \\ \times \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge \left[\mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge \left[\cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \mathbf{e}_1 \pm \sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \mathbf{e}_2 \right] \right]}{\|\mathbf{x}\|} \end{aligned}$$

et

$$\check{\mathbf{B}}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{E}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t)}{c}$$

On constate ainsi les faits suivants :

Lorsque $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_1$ la polarisation est linéaire selon \mathbf{e}_2 .

Lorsque $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_2$ la polarisation est linéaire selon \mathbf{e}_1 .

Lorsque $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_3$ la polarisation est circulaire.

Lorsque $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{e}_j, \forall j$ la polarisation est elliptique.

L'influence du champ d'induction $\check{\mathbf{B}}_0$ sur l'intensité ne se manifeste qu'au travers de la pulsation ω_0 . Donc l'influence du champ d'induction $\check{\mathbf{B}}_0$ est peu marquée.

Exercice 7.5

On considère un dipôle électrique permanent en rotation autour d'un axe fixe. L'axe de rotation passe par le centre du dipôle et l'orientation de ce dernier dipôle est orthogonale à cet axe. La pulsation de rotation ω est constante. Déterminer le champ électromagnétique ainsi produit et la puissance rayonnée lorsque

la longueur d'onde du rayonnement émis est très supérieure à la dimension du dipôle. L'émission de ce rayonnement génère-t-elle un moment de force qui s'oppose au mouvement de rotation du dipôle ? Si, oui, quelle est la valeur de ce moment de force ?

Solution :

$$\mathbf{y}_{\pm}(t) = \pm a \left(\cos(\omega t) \mathbf{e}_1 + \sin(\omega t) \mathbf{e}_2 \right)$$

$$\mathbf{p}(t) = 2 Q a \left(\cos(\omega t) \mathbf{e}_1 + \sin(\omega t) \mathbf{e}_2 \right)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = -\omega^2 2 Q a \left(\cos(\omega t) \mathbf{e}_1 + \sin(\omega t) \mathbf{e}_2 \right)$$

Il convient de se référer maintenant aux résultats (7.11), (7.12) et (7.13).

$$\check{\mathbf{H}}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\check{\mathbf{B}}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t)}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \wedge \left(\frac{-\ddot{\mathbf{p}}(t - \|\mathbf{x}\|/c)}{c} \right)$$

et

$$\mathbf{E}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \wedge \check{\mathbf{H}}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \check{\mathbf{H}}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) \\ = & \frac{Q a \omega^2}{2 \pi c} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \wedge \left(\cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \mathbf{e}_1 + \sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \mathbf{e}_2 \right) \\ = & \frac{Q a \omega^2}{2 \pi c} \left(\frac{\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{x}\|^2} \cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) + \frac{\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}_2}{\|\mathbf{x}\|^2} \sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) \\ = & -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{Q a \omega^2}{2 \pi c} \left(\frac{\mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}_1)}{\|\mathbf{x}\|^3} \cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{x} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}_2)}{\|\mathbf{x}\|^3} \sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \right) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \cos \phi \left(\sin \theta \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) + \cos \theta \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) \right) - \sin \phi \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi) \\ \mathbf{e}_2 &= \sin \phi \left(\sin \theta \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) + \cos \theta \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) \right) + \cos \phi \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
& \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) \wedge \mathbf{e}_1 \\
= & \cos \phi \cos \theta \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) \wedge \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) - \sin \phi \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) \wedge \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi) \\
= & \cos \phi \cos \theta \check{\mathbf{e}}_\phi(r, \theta, \phi) + \sin \phi \check{\mathbf{e}}_\theta(r, \theta, \phi) \\
& \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) \wedge \mathbf{e}_2 \\
= & \sin \phi \cos \theta \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) \wedge \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) + \cos \phi \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) \wedge \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi) \\
= & \sin \phi \cos \theta \check{\mathbf{e}}_\phi(r, \theta, \phi) - \cos \phi \check{\mathbf{e}}_\theta(r, \theta, \phi)
\end{aligned}$$

puis finalement

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) \wedge (\mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) \wedge \mathbf{e}_1) &= -\cos \phi \cos \theta \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) + \sin \phi \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi) \\
\mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) \wedge (\mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) \wedge \mathbf{e}_2) &= -\sin \phi \cos \theta \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) - \cos \phi \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi)
\end{aligned}$$

Ralativement aux vecteurs de base orthonormés associés aux coordonnées sphériques les expressions des champs électrique magnétique prennent la forme

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{H}}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{Q a \omega^2}{2 \pi c} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \left(-\sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c) - \phi) \check{\mathbf{e}}_\theta(r, \theta, \phi) \right. \\
&\quad \left. + \cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c) - \phi) \cos \theta \check{\mathbf{e}}_\phi(r, \theta, \phi) \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{Q a \omega^2}{2 \pi c} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \left(\cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c) - \phi) \cos \theta \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) \right. \\
&\quad \left. + \sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c) - \phi) \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi) \right)
\end{aligned}$$

Le rayonnement émis dans la direction (θ, ϕ) présente une polarisation elliptique dont les axes principaux sont orientés selon les vecteurs $\mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi)$ et $\mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi)$. L'excentricité elliptique (rapport de la longueur du petit axe à celle du grand axe) du rayonnement émis est donnée par la valeur de $\cos \theta$. Ainsi, lorsque $\theta = 0$ la polarisation de l'onde émise est circulaire à droite si $\omega > 0$ et l'onde émise dans la direction $\theta = \pi$ est polarisée circulairement à gauche. Dans le plan Ox^1x^2 , autrement dit lorsque $\theta = \pi/2$, l'onde émise est polarisée linéairement le champ magnétique étant orthogonal au plan Ox^1x^2 et le champ électrique parallèle à ce plan. Pour toutes les autres directions d'émission la polarisation est elliptique.

Pour ce qui concerne le flux d'énergie rayonnée, il suffit de constater que le vecteur de Poynting associé au rayonnement est donné par l'expression

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) \wedge \check{\mathbf{H}}_{\text{ray}}(\mathbf{x}, t) = \frac{Q^2 a^2 \omega^4}{(2\pi c)^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \\
&\times \left((\cos \theta)^2 (\cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c) - \phi))^2 + (\sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c) - \phi))^2 \right) \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi)
\end{aligned}$$

La valeur moyenne par unité de temps du flux d'énergie rayonnée a donc pour expression

$$\overline{\mathbf{S}}_{\text{ray}}(\mathbf{x}) = \frac{Q^2 a^2 \omega^4}{(2\pi c)^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \frac{(\cos \theta)^2 + 1}{2} \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi)$$

Ainsi la puissance moyenne totale rayonnée \dot{W} a pour expression

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \int_0^\pi \|\mathbf{x}\|^2 \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \|\overline{\mathbf{S}}_{\text{ray}}(\mathbf{x})\| \\ &= \frac{Q^2 a^2 \omega^4}{(2\pi c)^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{(\cos \theta)^2 + 1}{2} \\ &= \frac{Q^2 a^2 \omega^4}{(2\pi c)^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Le couple moyen $\overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{M}} \check{\mathbf{e}}_3$ qu'il faut fournir pour maintenir le mouvement de rotation vaut par conséquent

$$\overline{\mathcal{M}} = \frac{2}{3\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{Q^2 a^2}{c^2} \omega^3$$

Exercice 7.6

On considère un quadripôle électrique permanent en rotation autour d'un axe fixe avec une vitesse de rotation ω qui est constante. Ce quadripôle est réalisé par une distribution de charges électriques Q et $-Q$ aux sommets d'un carré de côté $2a$. Aux sommets opposés sont attachés des charges électriques de même signe et aux sommets consécutifs sont attachés des charges électriques de signes opposés. L'axe de rotation est orthogonal au plan du carré et passe par le centre de celui-ci.

1. Déterminer le champ électromagnétique produit lorsque la longueur d'onde de ce rayonnement est très supérieure à la dimension de la source.
2. Evaluer la puissance rayonnée.

Solution :

Pour aborder cet exercice il convient de se placer dans le contexte de la sous-section 7.3.2. Les positions des 4 charges électriques ponctuelles de valeurs

$$Q_{(j)} = (-1)^j Q \quad , \quad j = 1, \dots, 4.$$

qui constituent le quadripôle ont des positions décrites au cours du temps par les 4 vecteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{(j)}(t) &= \sqrt{2} a \left(\cos(\omega t - \delta_{(j)}) \mathbf{e}_1 + \sin(\omega t - \delta_{(j)}) \mathbf{e}_2 \right) \\ \text{où } \delta_{(j)} &= (2j - 1) \frac{\pi}{4}, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Quant aux vitesses correspondantes elles sont respectivement fournies par les expressions

$$\dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t) = \sqrt{2} a \omega \left(-\sin(\omega t - \delta_{(j)}) \mathbf{e}_1 + \cos(\omega t - \delta_{(j)}) \mathbf{e}_2 \right)$$

Pour un point $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ et un instant t donnés, les temps retardés $t_{0(j)}(\mathbf{x}, t)$ correspondants pour ces 4 charges électriques sont déterminés par les conditions

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{r}_{(j)}(t_{0(j)}(\mathbf{x}, t))\| = c (t - t_{0(j)}(\mathbf{x}, t))$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^2 - 2\sqrt{2} a \left[x^1 \cos(\omega t_{0(j)}(\mathbf{x}, t) - \delta_{(j)}) + x^2 \sin(\omega t_{0(j)}(\mathbf{x}, t) - \delta_{(j)}) \right] \\ + 2a^2 = c^2 (t - t_{0(j)}(\mathbf{x}, t))^2 \end{aligned}$$

La situation qui nous intéresse est celle dans laquelle $\|\mathbf{x}\| \gg a$. Il est donc judicieux de poser

$$t_{0(j)}(\mathbf{x}, t) = t_0(\mathbf{x}, t) + \Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t) \quad \text{où} \quad t_0(\mathbf{x}, t) = t - \frac{\|\mathbf{x}\|}{c}$$

Ainsi les conditions qui précèdent peuvent être exprimées sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^2 - 2\sqrt{2} a \left[x^1 \cos(\omega (t_0(\mathbf{x}, t) + \Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t)) - \delta_{(j)}) \right. \\ \left. + x^2 \sin(\omega (t_0(\mathbf{x}, t) + \Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t)) - \delta_{(j)}) \right] \\ + 2a^2 = c^2 \left(\|\mathbf{x}\|/c - \Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t) \right)^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire après réduction, sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2} a}{c} \left[\frac{x^1}{\|\mathbf{x}\|} \cos(\omega (t_0(\mathbf{x}, t) + \Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t)) - \delta_{(j)}) \right. \\ \left. + \frac{x^2}{\|\mathbf{x}\|} \sin(\omega (t_0(\mathbf{x}, t) + \Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t)) - \delta_{(j)}) \right] \\ - \frac{c}{\|\mathbf{x}\|} \frac{a^2}{c^2} = \Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t) - \frac{c}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t)^2}{2} \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque la longueur d'onde du rayonnement émis est très supérieure aux dimensions de la source, ou encore, puisque la vitesse de déplacement

des charges électriques est très inférieure à la vitesse de la lumière, on dispose des inégalités

$$\omega \sqrt{2} a \ll c \quad \text{et} \quad \omega \Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t) \ll 1$$

car l'intervalle de temps $\Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t)$ est de l'ordre de grandeur du temps que met la lumière pour parcourir la distance a , autrement dit $\Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t)$ est de l'ordre de grandeur a/c . Par conséquent dans l'égalité qui précède on ne retiendra, en première approximation, que les termes d'ordre le plus bas en a/c . Dans ces conditions

$$\Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\sqrt{2} a}{c} \left[\frac{x^1}{\|\mathbf{x}\|} \cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t) - \delta_{(j)}) + \frac{x^2}{\|\mathbf{x}\|} \sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t) - \delta_{(j)}) \right]$$

Puisque les variations des positions angulaires des charges électriques durant l'intervalle de temps $\Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t)$ sont beaucoup plus petite que π il en résulte qu'en première approximation les positions retardées des charges électriques sont données par les vecteurs

$$\mathbf{r}_{(j)}(t_{(j)}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t)) + \Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))$$

De même pour les vitesses correspondantes

$$\dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_{(j)}(\mathbf{x}, t)) = \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t)) + \Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t) \ddot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))$$

Au vu de ce qui précède il est apparent que les corrections $\Delta_{(j)}(\mathbf{x}, t)$, des temps retardés, jouent un rôle négligeable et pour la suite nous supposons que

$$\mathbf{r}_{(j)}(t_{(j)}(\mathbf{x}, t)) \cong \mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t)) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_{(j)}(\mathbf{x}, t)) \cong \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))$$

Enchaînons par la détermination du potentiel scalaire retardé et du potentiel-vecteur retardé de la distribution de charges électriques ponctuelles qui précède. Il s'agit en fait d'appliquer les formules (7.59) et (7.60) en commençant par exprimer les 4 vecteurs unités

$$\mathbf{n}_{(j)}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))\|} \quad , \quad j = 1, \dots, 4$$

puis en déterminant les facteurs

$$\frac{1}{1 - \mathbf{n}_{(j)}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))/c} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))\|} \quad , \quad j = 1, \dots, 4$$

Dans cette approche il faudra se rappeler que l'on ne souhaite finalement que déterminer les termes des potentiels puis des champs qui sont asymptotiquement dominants et significatifs, c'est-à-dire qui finalement conduisent aux termes des

expressions du champ électrique et du champ magnétique qui se comportent asymptotiquement comme $O(1/\|\mathbf{x}\|)$. Dans ce but relevons d'abord que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} - \mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))\| &= \|\mathbf{x}\| \sqrt{1 - 2 \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))}{\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{\|\mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2}} \\ &= \|\mathbf{x}\| \left(1 - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))}{\|\mathbf{x}\|^2}\right) + O(\|\mathbf{x}\|^{-1})\end{aligned}$$

puisque, lorsque $|z| < 1$, on a $\sqrt{1+z} = 1 + z/2 - z^2/8 + \dots$. De ce dernier développement découle directement le développement

$$\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \left(1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))}{\|\mathbf{x}\|^2}\right) + O(\|\mathbf{x}\|^{-3})$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))\|} \\ &= \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \left(1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))}{\|\mathbf{x}\|^2}\right) - \frac{\mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))}{\|\mathbf{x}\|} + O(\|\mathbf{x}\|^{-2})\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t)) = \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))}{\|\mathbf{x}\|} + O(\|\mathbf{x}\|^{-1})$$

car $\mathbf{r}_{(j)}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t) = 0$. Ensuite

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))/c} &= 1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))/c}{\|\mathbf{x}\|} \\ &+ \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))/c}{\|\mathbf{x}\|}\right)^2 + O(\|\mathbf{x}\|^{-1})\end{aligned}$$

Finalement, à des termes d'ordre $O(\|\mathbf{x}\|^{-2})$ près,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1 - \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))/c} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{r}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \\ &\times \left[1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))/c}{\|\mathbf{x}\|} + \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))/c}{\|\mathbf{x}\|}\right)^2 \right] + O(\|\mathbf{x}\|^{-2})\end{aligned}$$

Afin de mettre en application les formules (7.59) et (7.60) il convient de commencer par établir les résultats préliminaires suivants.

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} \dot{\mathbf{r}}_j(t_0(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{0} \\
(2) \quad & \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} (\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j(t_0(\mathbf{x}, t))/c)^2 = 4 Q \frac{a^2 \omega^2}{c^2} \\
& \quad \times \left[- \left[(x^1)^2 - (x^2)^2 \right] \sin(2 \omega t_0(\mathbf{x}, t)) + 2 x^1 x^2 \cos(2 \omega t_0(\mathbf{x}, t)) \right] \\
(3) \quad & \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} (\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j(t_0(\mathbf{x}, t))) \dot{\mathbf{r}}_j(t_0(\mathbf{x}, t)) = 4 Q a^2 \omega^2 \\
& \quad \times \left[\left[-x^1 \sin(2 \omega t_0(\mathbf{x}, t)) + x^2 \cos(2 \omega t_0(\mathbf{x}, t)) \right] \mathbf{e}_1 \right. \\
& \quad \left. + \left[x^2 \sin(2 \omega t_0(\mathbf{x}, t)) + x^1 \cos(2 \omega t_0(\mathbf{x}, t)) \right] \mathbf{e}_2 \right] \\
(4) \quad & \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} (\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j(t_0(\mathbf{x}, t))/c)^2 \dot{\mathbf{r}}_j(t_0(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

En effet, pour la première égalité

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} \dot{\mathbf{r}}_j(t_0(\mathbf{x}, t)) \\
= & \sqrt{2} a \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} \omega \left[-\sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t) - \delta_j) \mathbf{e}_1 + \cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t) - \delta_j) \mathbf{e}_2 \right] \\
= & \sqrt{2} a \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} \omega \left[\sin \delta_j \left(\cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) \mathbf{e}_1 + \sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) \mathbf{e}_2 \right) \right. \\
& \left. + \cos \delta_j \left(-\sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) \mathbf{e}_1 + \cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) \mathbf{e}_2 \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

puisque

$$\sum_{j=1}^4 Q_{(j)} \sin \delta_j = \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} \cos \delta_j = 0$$

Pour la deuxième égalité commençons par nous livrer à la constatation que voici

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} (\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j(t_0(\mathbf{x}, t)))^2 = 2 a^2 \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} \omega^2 \\
& \quad \times \left[\sin \delta_j \left[x^1 \cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) + x^2 \sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) \right] \right. \\
& \quad \left. + \cos \delta_j \left[-x^1 \sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) + x^2 \cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) \right] \right]^2
\end{aligned}$$

Ensuite remarquons que

$$\sum_{j=1}^4 Q_{(j)} (\sin \delta_j)^2 = \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} (\cos \delta_j)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} = 0$$

$$\sum_{j=1}^4 Q_{(j)} \sin \delta_j \cos \delta_j = \frac{Q}{2} + \frac{Q}{2} - \frac{-Q}{2} - \frac{-Q}{2} = 2 Q$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} (\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j(t_0(\mathbf{x}, t))/c)^2 &= 8 Q \frac{a^2 \omega^2}{c^2} \\ &\times [x^1 \cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) + x^2 \sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t))] \\ &\times [-x^1 \sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) + x^2 \cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t))] \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé plus haut le produit des parenthèses [...] × [...] étant effectué. Pour la troisième égalité remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} (\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{r}}_j(t_0(\mathbf{x}, t))) (\dot{\mathbf{r}}_j(t_0(\mathbf{x}, t))) &= 2 a^2 \omega^2 \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} \\ &\times [\sin \delta_j (\cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) \mathbf{e}_1 + \sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) \mathbf{e}_2) \\ &+ \cos \delta_j (-\sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) \mathbf{e}_1 + \cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) \mathbf{e}_2)] \\ &\times [\sin \delta_j (\cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) x^1 + \sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) x^2) \\ &+ \cos \delta_j (-\sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) x^1 + \cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) x^2)] \\ &= 4 Q a^2 \omega^2 [(\cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) \mathbf{e}_1 + \sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) \mathbf{e}_2) \\ &\times (-\sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) x^1 + \cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) x^2) \\ &+ (-\sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) \mathbf{e}_1 + \cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) \mathbf{e}_2) \\ &\times (\cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) x^1 + \sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) x^2)] \end{aligned}$$

puisque seuls les termes avec en facteur $\sum_{j=1}^4 Q_{(j)} \sin \delta_j \cos \delta_j = 2 Q$ apportent une contribution non-nulle. L'expression finale découle ensuite des formules

$$2 \sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) \cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t)) = \sin(2 \omega t_0(\mathbf{x}, t))$$

et

$$(\cos(\omega t_0(\mathbf{x}, t)))^2 - (\sin(\omega t_0(\mathbf{x}, t)))^2 = \cos(2 \omega t_0(\mathbf{x}, t))$$

après développement des facteurs et groupement des termes. Pour la quatrième égalité il suffit de constater que

$$\sum_{j=1}^4 Q_{(j)} (\sin \delta_j)^3 = \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} (\cos \delta_j)^3 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} = 0$$

et

$$\sum_{j=1}^4 Q_{(j)} (\sin \delta_j)^2 \cos \delta_j = \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} (\cos \delta_j)^2 \sin \delta_j = 0$$

A l'aide des résultats qui viennent d'être établis on peut exprimer le potentiel scalaire retardé et le potentiel-vecteur retardé à des termes d'ordre $O(\|\mathbf{x}\|^{-2})$ près. En effet partant des formules (7.59) et (7.60) pour le potentiel scalaire il vient

$$\begin{aligned} \Phi_{ret}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \\ &\times \left[1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))/c}{\|\mathbf{x}\|} + \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))/c}{\|\mathbf{x}\|} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4 a^2 Q \omega^2}{c^2} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^3} \\ &\times \left[-((x^1)^2 - (x^2)^2) \sin(2 \omega t_0(\mathbf{x}, t)) + 2 x^1 x^2 \cos(2 \omega t_0(\mathbf{x}, t)) \right] \end{aligned}$$

Pour le potentiel-vecteur il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ret}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^4 Q_{(j)} \frac{\dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))}{\|\mathbf{x}\|} \\ &\times \left[1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))/c}{\|\mathbf{x}\|} + \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{(j)}(t_0(\mathbf{x}, t))/c}{\|\mathbf{x}\|} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{4 a^2 Q \omega^2}{c} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \\ &\times \left[\left(-x^1 \sin(2 \omega t_0(\mathbf{x}, t)) + x^2 \cos(2 \omega t_0(\mathbf{x}, t)) \right) \mathbf{e}_1 \right. \\ &\left. + \left(x^2 \sin(2 \omega t_0(\mathbf{x}, t)) + x^1 \cos(2 \omega t_0(\mathbf{x}, t)) \right) \mathbf{e}_2 \right] \end{aligned}$$

Il convient pour terminer de passer en coordonnées sphériques. Dans ces conditions

$$\Phi_{ret}(r, \theta, \phi, t) = \frac{-1}{4\pi \epsilon_0} \frac{4 a^2 Q \omega^2}{c^2} \frac{(\sin \theta)^2}{r} \sin [2 (\omega t_0(r, t) - \phi)] \quad \text{où } t_0(r, t) = t - \frac{r}{c}$$

puisque

$$2 x^1 x^2 = r^2 (\sin \theta)^2 2 \sin \phi \cos \phi = r^2 (\sin \theta)^2 \sin(2\phi)$$

et

$$(x^1)^2 - (x^2)^2 = r^2 (\sin \theta)^2 ((\cos \phi)^2 - (\sin \phi)^2) = r^2 (\sin \theta)^2 \cos(2\phi)$$

Pour le potentiel-vecteur

$$\mathbf{A}_{ret}(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{4 a^2 Q \omega^2}{c} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$\times \left(-\sin(2\omega t_0(r, t) - \phi) \mathbf{e}_1 + \cos(2\omega t_0(r, t) - \phi) \mathbf{e}_2 \right)$$

et finalement

$$\mathbf{A}_{ret}(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{4 a^2 Q \omega^2}{c} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$\times \left(-\sin(2(\omega t_0(r, t) - \phi)) (\sin \theta \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) + \cos \theta \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi)) \right.$$

$$\left. + \cos(2(\omega t_0(r, t) - \phi)) \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi) \right)$$

puisque, les relations inverses des relations (C.37) s'écrivent

$$\mathbf{e}_1 = \cos \phi (\sin \theta \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) + \cos \theta \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi)) - \sin \phi \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi)$$

$$\mathbf{e}_2 = \sin \phi (\sin \theta \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) + \cos \theta \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi)) + \cos \phi \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi)$$

Venons-en à la détermination des composantes asymptotiques du champ d'induction et du champ électrique. Pour le champ d'induction, partant de la relation

$$\check{\mathbf{B}}_{ray}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{rot} \mathbf{A}_{ray}(\mathbf{x}, t)$$

à l'aide de la formule (C.40) et compte tenu du fait que

$$A_{ret\ r}(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{4 a^2 Q \omega^2}{c} \frac{-(\sin \theta)^2}{r} \sin(2(\omega t_0(r, t) - \phi))$$

$$A_{ret\ \theta}(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{4 a^2 Q \omega^2}{c} \frac{-\sin \theta \cos \theta}{r} \sin(2(\omega t_0(r, t) - \phi))$$

$$A_{ret\ \phi}(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{4 a^2 Q \omega^2}{c} \frac{\sin \theta}{r} \cos(2(\omega t_0(r, t) - \phi))$$

il vient

$$(\check{\mathbf{B}}_{ret})_\theta(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{8 a^2 Q \omega^3}{c^2} \frac{-\sin \theta}{r} \sin(2(\omega t_0(r, t) - \phi))$$

et

$$(\check{\mathbf{B}}_{ret})_\phi(r, \theta, \phi, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{8 a^2 Q \omega^3}{c^2} \frac{\sin \theta}{r} \cos \theta \cos(2(\omega t_0(r, t) - \phi))$$

Venons-en pour terminer à l'expression du champ électrique. On a

$$\mathbf{E}_{ret}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}_{ray}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \mathbf{grad} \Phi_{ret}(\mathbf{x}, t)$$

Pour la dérivée partielle des composantes du potentiel-vecteur par rapport au temps à des termes d'ordre $O(r^{-2})$ près il vient

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(A_{ret})_r(r, \theta, \phi, t)}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{8 a^2 Q\omega^3}{c} \frac{(\sin\theta)^2}{r} \cos(2(\omega t_0(r, t) - \phi)) \\ -\frac{\partial(A_{ret})_\theta(r, \theta, \phi, t)}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{8 a^2 Q\omega^3}{c} \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} \cos(2(\omega t_0(r, t) - \phi)) \\ -\frac{\partial(A_{ret})_\phi(r, \theta, \phi, t)}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{8 a^2 Q\omega^3}{c} \frac{\sin\theta}{r} \sin(2(\omega t_0(r, t) - \phi)) \end{aligned}$$

Ensuite pour les composantes du gradient du potentiel scalaire à des termes d'ordre $O(r^{-2})$ près on a

$$-\mathbf{grad} \Phi_{ret}(r, \theta, \phi, t) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{8 a^2 Q\omega^3}{c^3} \frac{(\sin\theta)^2}{r} \cos(2(\omega t_0(r, t) - \phi)) \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi)$$

Finalement

$$\begin{aligned} (E_{ret})_r(r, \theta, \phi, t) &\equiv 0 \\ (E_{ret})_\theta(r, \theta, \phi, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{8 a^2 Q\omega^3}{c} \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} \cos(2(\omega t_0(r, t) - \phi)) \\ \text{et} \\ (E_{ret})_\phi(r, \theta, \phi, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{8 a^2 Q\omega^3}{c} \frac{\sin\theta}{r} \sin(2(\omega t_0(r, t) - \phi)) \end{aligned}$$

Déterminons encore l'expression asymptotique du vecteur de Poynting $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_{ret}(\mathbf{x}, t) \wedge \check{\mathbf{H}}_{ret}(\mathbf{x}, t)$. Puisque

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ret}(r, \theta, \phi, t) &= (E_{ret})_\theta(r, \theta, \phi, t) \mathbf{e}_\theta(r, \theta, \phi) + (E_{ret})_\phi(r, \theta, \phi, t) \mathbf{e}_\phi(r, \theta, \phi) \\ \text{et} \\ \check{\mathbf{H}}_{ret}(r, \theta, \phi, t) &= \check{H}_\theta(r, \theta, \phi, t) \check{\mathbf{e}}_\theta(r, \theta, \phi) + \check{H}_\phi(r, \theta, \phi, t) \check{\mathbf{e}}_\phi(r, \theta, \phi) \end{aligned}$$

le vecteur de Poynting asymptotique est radial. Autrement dit

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_{ret}(\mathbf{x}, t) \wedge \check{\mathbf{H}}_{ret}(\mathbf{x}, t) = S_r(\mathbf{x}, t) \check{\mathbf{e}}_r(r, \theta, \phi)$$

La composante radiale de ce dernier vecteur s'écrit

$$\begin{aligned} &S_r(r, \theta, \phi, t) \\ &= (E_{ray})_\theta(r, \theta, \phi, t) (\check{H}_{ray})_\phi(r, \theta, \phi, t) - (E_{ray})_\phi(r, \theta, \phi, t) (\check{H}_{ray})_\theta(r, \theta, \phi, t) \\ &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{64 a^4 Q^2 \omega^6 \sin^2\theta}{c^4 r^2} \\ &\times \left[(\cos\theta)^2 \cos^2(2(\omega t_0(r, t) - \phi)) + \sin^2(2\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c) - 2\phi) \right] \end{aligned}$$

Donc en moyenne au cours du temps

$$\begin{aligned}\bar{S}_r(r, \theta, \phi) &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{64 a^4 Q^2 \omega^6}{c^4} \frac{(\sin \theta)^2}{r^2} \frac{(\cos \theta)^2 + 1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{32 a^4 Q^2 \omega^6}{c^4} \frac{1}{r^2} \frac{1 - (\cos \theta)^4}{2}\end{aligned}$$

L'intensité du rayonnement émis dans la direction $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ est nulle c'est-à-dire selon l'axe Ox^3 . En revanche l'intensité est maximale pour le rayonnement émis dans la direction $\theta = \pi/2$ c'est-à-dire dans le plan Ox^1x^2 . Finalement la puissance moyenne totale rayonnée prend la valeur.

$$\begin{aligned}\bar{W} &= \int_0^\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \bar{S}_r(r, \theta, \phi) \\ &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{64 a^4 Q^2 \omega^6}{c^4} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1 - \cos^4 \theta}{2} \\ &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{64 a^4 Q^2 \omega^6}{c^4} \frac{8\pi}{5} = \frac{1}{5\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{32 a^4 Q^2 \omega^6}{c^4}\end{aligned}$$

Elle est proportionnelle à la 6-ème puissance de la fréquence de rotation du quadripôle électrique.

Exercice 7.7

On considère une cavité cylindrique au sein d'un milieu métalliques supposé parfaitement conducteur. Le rayon du cylindre vaut R et la longueur de ce dernier vaut a . La constante diélectrique et la perméabilité magnétique au sein de la cavité sont celles du vide. On demande quels sont les modes du type $TM(0)$ qui peuvent exister dans cette cavité et quel est le spectre des fréquences de ces modes.

Qu'en est-t-il des modes du type $TE(0)$?

Indication : Utiliser les expressions (6.146) des modes transverses magnétiques cylindriques.

Solution :

Il convient d'adopter les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) dont l'axe Oz coïncide avec l'axe de symétrie cylindrique de la cavité. La cavité est limitée par des extrémités circulaires en $z = \pm a/2$. En outre $\rho \leq R$. Au sujet des modes $TM(0)$ il est utile de se référer aux expressions qui figurent sous (6.146).

Les composantes non-nulles du champ électrique et du champ magnétique sont

$$\begin{aligned}
E_\rho(\rho, \phi, z) &= \frac{\kappa}{-i\omega\varepsilon_0} \frac{dy(k\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z) \\
E_z(\rho, \phi, z) &= \frac{-k^2}{-i\omega\varepsilon_0} y(k\rho) \exp(i\kappa z) \\
\check{H}_\phi(\rho, \phi, z) &= \frac{dy(k\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z) \\
k &= \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \kappa^2}
\end{aligned}$$

Donc $y(k\rho) = J_0(k\rho)$. La forme générale du mode $TM(0)$ qui peut exister au sein de la cavité est donc donnée par les expressions de la forme

$$\begin{aligned}
E_\rho(\rho, \phi, z) &= \sum_{\kappa} A_\kappa \frac{\kappa}{-i\omega\varepsilon_0} \frac{dy(k(\kappa)\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z) \\
E_z(\rho, \phi, z) &= \sum_{\kappa} A_\kappa \frac{-k(\kappa)^2}{-i\omega\varepsilon_0} y(k(\kappa)\rho) \exp(i\kappa z) \\
\check{H}_\phi(\rho, \phi, z) &= \sum_{\kappa} A_\kappa \frac{dy(k(\kappa)\rho)}{d\rho} \exp(i\kappa z) \\
k(\kappa) &= \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \kappa^2}
\end{aligned}$$

où les symboles A_κ désignent des constantes dont les valeurs sont à déterminer à partir des conditions aux limites. Ces conditions aux limites sont les suivantes. Tout d'abord il faut que la composante tangentielle du champ électrique sur le bord du cylindre s'annule.

$$E_z(R, \phi, z) = 0 \quad , \quad \forall z \in [-a/2, a/2] \quad \text{et} \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

et par conséquent

$$\sum_{\kappa} A_\kappa \frac{-k(\kappa)^2}{-i\omega\varepsilon_0} y(k(\kappa)R) \exp(i\kappa z) = 0 \quad , \quad \forall z$$

Si l'on se limite à ne déterminer qu'un seul mode à la fois, ce qui n'est pas limitatif, il faut que

$$y(k(\kappa)R) = u_0 J_0(k(\kappa)R) = 0 \quad \text{autrement dit} \quad k(\kappa)R = z_{0,m}$$

où le symbole $z_{0,m}$ désigne le m ième zéro de la fonction de Bessel $J_0(z)$. Dans ces conditions, seules deux valeurs sont possibles pour κ . Elles sont

$$\kappa = \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{z_{0,m}}{R}\right)^2}$$

Restent les conditions aux limites au niveau des extrémités de la cavité cylindrique. Elles s'écrivent

$$E_\rho(\rho, \phi, \pm a/2) = 0 \quad , \quad \forall \rho \leq R \quad \text{et} \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

Autrement dit, il faut que

$$\sum_{\kappa} A_{\kappa} \kappa \exp(i\kappa a/2) = A_{\kappa} \kappa \exp(i \pm \kappa a/2) + A_{-\kappa} \kappa \exp(-i \pm \kappa a/2) = 0$$

Ce système homogène d'équations linéaires en $A_{-\kappa}$ et $A_{+\kappa}$ possède une solution non-triviale seulement si le déterminant caractéristique de ce dernier système est nulle, donc si et seulement si

$$\sin(\kappa a) = 0 \quad \text{donc si et seulement si} \quad \kappa = \frac{n\pi}{a} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Compte tenu de ce résultat les pulsations propres de la cavité résonante sont données par

$$\omega = \omega_{m \ n} = c \sqrt{\left(\frac{z_{0,m}}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

La pulsation propre minimale de la cavité a donc pour valeur

$$\omega = \omega_{1 \ 1} = c \sqrt{\left(\frac{z_{0,1}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

Exercice 7.8

Dans le vide une antenne linéaire de longueur L , dont la position coïncide avec le segment $[-L/2, +L/2]$ de l'axe Ox^3 , est excitée de telle manière que la distribution du courant alternatif de pulsation ω qui y circule présente une intensité de la forme

$$I(z, t) = I_0 \sin(\kappa z) \sin(\omega t) \quad , \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \quad \text{où} \quad \kappa = \frac{2\pi}{L}$$

Déterminer le champ électrique et le champ magnétique rayonnés à grande distance par cette antenne sachant que la longueur d'onde $\lambda = 2\pi c/\omega$ du rayonnement émis est très supérieure à la longueur L . Ensuite calculer le flux d'énergie de cette antenne en fonction de la direction d'émission.

Solution :

Commençons par noter que l'équation de continuité de la charge électrique, énoncée sous (2.59), peut être particularisée à la situation qui nous concerne ici sous la forme suivante dans laquelle le symbole $\sigma(z, t)$ désigne la densité linéaire de charge électrique.

$$\frac{dI(z, t)}{dz} + \frac{d\sigma(z, t)}{dt} = 0$$

La charge électrique totale de l'antenne est supposée nulle et sous cette condition

$$\sigma(y, t) = \frac{\kappa I_0}{\omega} \cos(\kappa z) \cos(\omega t)$$

Dans la situation qui nous concerne ici les expressions (7.4) et (7.5) du potentiel scalaire et du potentiel-vecteur retardés prennent la forme particulière que voici

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} dz \frac{\kappa I_0}{\omega} \frac{\cos(\kappa z) \cos(\omega(t - \|\mathbf{x} - z \mathbf{e}_3\|/c))}{\|\mathbf{x} - z \mathbf{e}_3\|}$$

et

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} dz I_0 \mathbf{e}_3 \frac{\sin(\kappa z) \sin(\omega(t - \|\mathbf{x} - z \mathbf{e}_3\|/c))}{\|\mathbf{x} - z \mathbf{e}_3\|}$$

Or dans les expressions précédentes de $\Phi(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ on ne souhaite ne retenir que les contributions asymptotiquement significatives donc qui décroissent avec la distance à l'antenne comme $O(\|\mathbf{x}\|^{-1})$. Commençons donc par noter que

$$\|\mathbf{x} - z \mathbf{e}_3\| = \|\mathbf{x}\| - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{x}\|} z + O\left(\frac{z^2}{\|\mathbf{x}\|^2}\right)$$

et

$$\frac{1}{\|\mathbf{x} - z \mathbf{e}_3\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \left[1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{x}\|} \frac{z}{\|\mathbf{x}\|} + O\left(\frac{z^2}{\|\mathbf{x}\|^2}\right) \right]$$

Notons encore qu'en coordonnées sphériques $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3/\|\mathbf{x}\| \equiv \cos \theta$. En outre

$$\begin{aligned} & \sin(\omega(t - \|\mathbf{x} - z \mathbf{e}_3\|/c)) \approx \sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c + \cos \theta z/c)) \\ = & \sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \cos(\omega \cos \theta z/c) + \cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \sin(\omega \cos \theta z/c) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \cos(\omega(t - \|\mathbf{x} - z \mathbf{e}_3\|/c)) \approx \cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c + \cos \theta z/c)) \\ = & \cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \cos(\omega \cos \theta z/c) - \sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c)) \sin(\omega \cos \theta z/c) \end{aligned}$$

Compte tenu des développements qui précèdent on constate sans difficulté que les contributions asymptotiquement significatives du potentiel scalaire et du potentiel-vecteur peuvent être écrites sous la forme

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\kappa I_0}{\omega} \left[C_1^\Phi(\mathbf{x}) \frac{\cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} - C_2^\Phi(\mathbf{x}) \frac{\sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \right]$$

où

$$\begin{aligned} C_1^\Phi(\mathbf{x}) &= \int_{-L/2}^{L/2} dz \cos(\kappa z) \cos(\omega \cos \theta z/c) + O(\|\mathbf{x}\|^{-1}) \\ C_2^\Phi(\mathbf{x}) &= \int_{-L/2}^{L/2} dz \cos(\kappa z) \sin(\omega \cos \theta z/c) + O(\|\mathbf{x}\|^{-1}) \approx 0 \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \approx \frac{\mu_0 I_0 \mathbf{e}_3}{4\pi} \left[C_1^{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \frac{\sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} + C_2^{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \frac{\cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \right]$$

où

$$\begin{aligned} C_1^{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) &= \int_{-L/2}^{L/2} dz \sin(\kappa z) \cos(\omega \cos \theta z/c) + O(\|\mathbf{x}\|^{-1}) \approx 0 \\ C_2^{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) &= \int_{-L/2}^{L/2} dz \sin(\kappa z) \sin(\omega \cos \theta z/c) + O(\|\mathbf{x}\|^{-1}) \end{aligned}$$

Finalement, toutes intégrations faites et ayant posé

$$u \equiv \frac{\omega \cos \theta L}{2\pi c} = \cos \theta \frac{L}{\lambda}$$

il vient

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &\approx \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\kappa I_0}{\omega} \int_{-L/2}^{L/2} dz \cos(\kappa z) \cos(\omega \cos \theta z/c) \frac{\cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \\ &= \frac{I_0}{2\pi \omega \varepsilon_0} \frac{u \sin(\pi u)}{1 + u^2} \frac{\cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &\approx \frac{\mu_0 I_0 \mathbf{e}_3}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} dz \sin(\kappa z) \sin(\omega \cos \theta z/c) \frac{\cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \\ &= \frac{\mu_0 I_0 \mathbf{e}_3}{4\pi} \frac{L}{\pi} \frac{\sin(\pi u)}{1 + u^2} \frac{\cos(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \end{aligned}$$

Détails des intégration des expressions de $C_1^\Phi(\mathbf{x})$ et $C_2^A(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned}
 C_1^\Phi(\mathbf{x}) &\approx \int_{-L/2}^{L/2} dz \cos(\omega \cos \theta z/c) \cos(\kappa z) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dz \left[\cos((\kappa - \omega \cos \theta/c) z) + \cos((\kappa + \omega \cos \theta/c) z) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((\kappa - \omega \cos \theta/c) z)}{\kappa - \omega \cos \theta/c} + \frac{\sin((\kappa + \omega \cos \theta/c) z)}{\kappa + \omega \cos \theta/c} \right] \Big|_{-L/2}^{L/2} \\
 &= \frac{\sin(\omega \cos \theta L/2c)}{\kappa - \omega \cos \theta/c} - \frac{\sin(\omega \cos \theta L/2c)}{\kappa + \omega \cos \theta/c} \\
 &= \frac{2 \omega \cos \theta/c}{\kappa^2 + (\omega \cos \theta/c)^2} \sin(\omega \cos \theta L/2c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2^A(\mathbf{x}) &\approx \int_{-L/2}^{L/2} dz \sin(\omega \cos \theta z/c) \sin(\kappa z) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dz \left[\cos((\kappa - \omega \cos \theta/c) z) - \cos((\kappa + \omega \cos \theta/c) z) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((\kappa - \omega \cos \theta/c) z)}{\kappa - \omega \cos \theta/c} - \frac{\sin((\kappa + \omega \cos \theta/c) z)}{\kappa + \omega \cos \theta/c} \right] \Big|_{-L/2}^{L/2} \\
 &= \frac{\sin(\omega \cos \theta L/2c)}{\kappa - \omega \cos \theta/c} + \frac{\sin(\omega \cos \theta L/2c)}{\kappa + \omega \cos \theta/c} \\
 &= \frac{2\kappa}{\kappa^2 + (\omega \cos \theta/c)^2} \sin(\omega \cos \theta L/2c)
 \end{aligned}$$

Détermination de la forme asymptotique du champ électrique et du champ d'induction

Commençons par remarquer que lorsque $L \ll \lambda$ alors $|u| \ll 1$ et en première approximation

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{I_0 u^2}{2 \omega \varepsilon_0} \frac{\cos(\omega (t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 \omega L^2 (\cos \theta)^2}{2\pi} \frac{\cos(\omega (t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0 I_0 \mathbf{e}_3}{4 \pi} L u \frac{\cos(\omega (t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \\
 &= \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{I_0 \omega L^2 \cos \theta}{2\pi} \frac{\cos(\omega (t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\mathbf{e}_3}{c}
 \end{aligned}$$

Pour dégager les expressions des champs asymptotiques commençons par faire les constatations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} \|\mathbf{x}\| &= \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = O(1) \\ \mathbf{grad} (\cos \theta) &= \mathbf{grad} \left[\frac{x^3}{\|\mathbf{x}\|} \right] = \frac{\mathbf{x} \wedge (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^3} = O(\|\mathbf{x}\|^{-1}) \\ \mathbf{grad} \left[\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \right] &= -\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} = O(\|\mathbf{x}\|^{-2}) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 \omega^2 L^2 (\cos \theta)^2}{2\pi c} \frac{\sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} + O(\|\mathbf{x}\|^{-2})$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 \omega^2 L^2 \cos \theta}{2\pi c} \frac{\sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{e}_3 + O(\|\mathbf{x}\|^{-2})$$

$$\check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 \omega^2 L^2 \cos \theta}{2\pi c^2} \frac{\sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{x}\|} + O(\|\mathbf{x}\|^{-2})$$

Des résultats qui précèdent découlent les expressions que voici pour le champ électrique et le champ d'induction asymptotique

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 \omega^2 L^2 \cos \theta}{2\pi c} \frac{\sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \left(\mathbf{e}_3 - \cos \theta \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 \omega^2 L^2 \cos \theta}{2\pi c} \frac{\sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\mathbf{x} \wedge (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) &= \check{\mathbf{rot}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 \omega^2 L^2 \cos \theta}{2\pi c^2} \frac{\sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{x}\|} \end{aligned}$$

A grande distance le vecteur de Poynting du champ électromagnétique s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \wedge \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2} \frac{(I_0 \omega^2 L^2 \cos \theta)^2}{(2\pi)^2 c^3} \left(\frac{\sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \right)^2 \\ &\quad \times \left(\mathbf{e}_3 - \cos \theta \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) \wedge \frac{\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{x}\|} \\ &= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2} \frac{(I_0 \omega^2 L^2 \cos \theta)^2}{(2\pi)^2 c^3} \left(\frac{\sin(\omega(t - \|\mathbf{x}\|/c))}{\|\mathbf{x}\|} \right)^2 (\sin \theta)^2 \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \end{aligned}$$

et finalement, le flux d'énergie rayonnée à grande distance et en moyenne dans le temps est donné par l'expression

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{2^8} \frac{1}{\pi^4} \frac{I_0^2 \omega^4 L^4}{c^4} (\sin(2\theta))^2 \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{2^4} \frac{I_0^2 L^4}{\lambda^4} (\sin(2\theta))^2 \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} \end{aligned}$$

Exercice 7.9★

Lorsque qu'une charge électrique est en mouvement accéléré, elle émet un rayonnement électromagnétique et l'émission de ce rayonnement qui, nous le savons maintenant grâce aux résultats établis à la sous-section 5.3.2, possède une quantité de mouvement, produit une force de réaction sur la charge électrique responsable de cette émission. L'objectif de l'exercice est de déterminer cette force de réaction lorsque la vitesse de la charge électrique est beaucoup plus petite que celle de la lumière dans le vide. Les raisons pour lesquelles nous limitons à cette situation particulière deviendront tout à fait claires au chapitre 8. Autrement dit, lors des développements inhérents à cet exercice il est supposé que

$$\|\dot{\mathbf{y}}(t)\| \ll c, \quad \forall t$$

La marche à suivre qui est suggérée est la suivante : A partir des résultats (7.52) et (7.53) déterminer la force de réaction que subit la distribution gaussienne de charge électrique de la forme (7.51) de la part du champ électromagnétique qu'elle crée **lorsque la vitesse instantanée de cette distribution de charge électrique est nulle**. Ensuite procéder au passage à la limite $a \rightarrow 0$ pour l'extension de la distribution de charge électrique.

Indications : La force de réaction due à la force de Laplace attachée au champ magnétique du rayonnement produit peut être d'emblée négligée car elle apporte une contribution nulle à la limite $a \rightarrow 0$. Par ailleurs, pour déterminer la force de réaction due au rayonnement il convient d'adopter une démarche dans laquelle c'est la transformée de Fourier par rapport à l'espace du potentiel scalaire et du potentiel vecteur retardés qui intervient.

Commentaires

1. Le résultat auquel on est censé parvenir est le suivant : La *force de réaction du champ électromagnétique* est donnée par une expression de la forme

$$\mathbf{F}^{rayon}(t) = -\delta M_{self} \dot{\mathbf{r}}(t) + \frac{Q^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{O}(a)$$

dans laquelle le coefficient δM_{self} , qui traduit une variation de la masse d'inertie, prend la valeur suivante

$$\delta M_{self} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Q^2}{6\pi \varepsilon_0 a c^2} = \sqrt{\frac{8}{9\pi}} \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0 a c^2}$$

La première observation que l'on peut faire est que la production de rayonnement s'accompagne d'une *modification de la masse d'inertie* du porteur de charge électrique. Mais, le résultat qui précède appelle plusieurs autres commentaires.

2. Hormis l'effet qui vient d'être mentionné, le rayonnement de la charge électrique produit une autre force de réaction dont la composante dominante est proportionnelle à la dérivée par rapport au temps de l'accélération subie par le porteur de cette charge. Cette dernière force de réaction, désignée parfois du terme de **force de freinage radiatif**, présente la forme suivante

$$\mathbf{F}^{\text{freinage}}(t) = -\eta_0 \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{O}(a) \quad \text{avec} \quad \eta_0 = \frac{Q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

Dans cette expression de la force de freinage radiatif, il apparaît, outre le premier terme, des termes supplémentaires dont la contribution tend à s'annuler lorsque l'extension a de la distribution de charge tend vers 0, autrement dit il apparaît des termes qui s'annulent lorsque la distribution de charge électrique devient ponctuelle. En fait, ces termes résiduels supplémentaires, traduisent un effet dynamique du rayonnement électromagnétique produit par la charge sur elle-même. L'influence de ces termes résiduels se traduit au niveau de l'évolution par des effets retardés qui s'étendent sur un intervalle de temps de l'ordre de grandeur du temps que met la lumière pour traverser la distribution de charge, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur a/c .

3. Dès lors qu'on décide de négliger l'influence de ces termes résiduels et dans la mesure où, bien entendu, on admet la validité de la dynamique de Newton, l'équation qui gouverne l'évolution d'un objet de masse M_0 qui porte une charge électrique et qui est soumis à l'influence d'une force extérieure $\mathbf{F}_{ext}(t)$ peut s'écrire

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) - \tau_0 \ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathbf{F}_{ext}(t)}{M_0 + \delta M_{self}}$$

si l'on convient de poser

$$\eta_0 = (M_0 + \delta M_{self}) \tau_0 \quad \text{donc} \quad \tau_0 = \frac{Q^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{(M_0 + \delta M_{self})c^2}$$

L'équation qui précède est connue sous le nom d'**équation d'Abraham-Lorentz**¹. Cette équation repose sur l'hypothèse de la validité de la dynamique newtonnienne. En fait il s'agit là d'une hypothèse dont la validité se limite, comme nous le verrons au chapitre 8, aux situations dans lesquelles le porteur de la charge électrique est animé d'une vitesse beaucoup plus petite que celle de la lumière dans le vide. Un autre point est à souligner. L'équation précédente devient exacte à la limite $a \rightarrow +0$ lorsque la vitesse instantanée $\dot{\mathbf{r}}(t)$ est nulle, mais cela à un détail près, la masse de

1. M. Abraham, Annalen der Physik **10**,105 (1903)

cet objet ponctuel subit une correction de masse δM_{self} qui devient infinie.

4. La procédure qui permet, par un argument essentiellement physique, d'écartier ce comportement divergent de la masse, porte le nom de **procédure de renormalisation de masse**. En un mot et d'une manière très schématique, on convient d'assimiler la grandeur $M_0 + \delta M_{self}$ à la *masse expérimentale* (ou effective) M_{exp} de la particule, attribuant alors à la grandeur M_0 le rôle de masse de la particule "nue", c'est-à-dire "dépouillée" du champ électrique qui lui est attaché et donc inobservable.
5. Voici encore un autre aspect qui découle des résultats qui viennent d'être obtenus. Si l'on se place selon l'idée qui veut que la masse d'une particule chargée est purement d'origine électromagnétique, c'est-à-dire selon l'idée qui présuppose que $M_0 = 0$ et par conséquent que $\delta M_{self} = M_{exp}$, alors la relation précédente au sujet de la correction de masse permet d'associer un "rayon électromagnétique classique" à une particule de masse M_{exp} , à l'aide de la relation

$$a = \sqrt{\frac{8}{9\pi}} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{M_{exp}c^2}$$

En fait l'usage adopté veut que le rayon classique r_0 d'une particule chargée, de charge électrique Q et de masse M_{exp} soit exprimé par la relation

$$r_0 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{M_{exp}c^2}$$

Dans le cas de l'électron $M_{exp}c^2 \cong 0.511 [MeV]$ et $Q = -1.6 \times 10^{-19} [A.s]$. Le rayon classique correspondant prend la valeur $r_0 \cong 2.8 \times 10^{-15} [m]$. En outre, le temps τ_0 vaut $\tau_0 \cong 6.0 \times 10^{-24} [s]$. Pour l'électron les effets de retard se situent donc bien au-delà de l'échelle de temps des phénomènes électromagnétiques relevant de l'électrodynamique classique. Les effets de retard se situent à une échelle de temps qui correspond à des périodes associées à des longueurs d'onde de l'ordre de $c \tau_0 = 1.8 \times 10^{-15} [m] = 1.8 [F]$.

Solution :

Détermination des transformées de Fourier spatiales du potentiel-vecteur et du potentiel scalaire du champ électromagnétique produit par la distribution de charge électrique en mouvement accéléré.

Nous allons ici poser le problème dans les mêmes termes que ceux qui furent utilisés au début de la sous-section 7.3.2 et 7.3.3 mais aborder d'une manière très différente. Nous considérons une distribution de charge électrique, rigide, à symétrie sphérique, de forme gaussienne d'extension $a > 0$, centrée en un point $\mathbf{r}(t)$ et qui varie au cours du temps. A cette distribution de charge électrique en mouvement est donc associé un courant électrique. Comme en 7.51, pour l'expression de la densité de charge électrique nous écrivons

$$q(\mathbf{x}, t) = Q \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \exp \left(- \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t))^2}{a^2} \right)$$

et pour la densité de courant correspondante nous disposons de l'expression

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = Q \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \dot{\mathbf{r}}(t) \exp \left(- \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t))^2}{a^2} \right)$$

Cependant, pour le problème qui nous concerne ici, nous allons nous livrer à une approche qui diffère quelque peu de celle que nous avons adoptée lors des développements présentés à la sous-section 7.3.2 et à la sous-section 7.3.3.

Il est en effet particulièrement commode de transcrire en termes de transformées de Fourier le problème qui se pose. **A ce sujet il est important de se remémorer les conventions d'écriture, généralement adoptées en physique pour les transformées de Fourier.** Celles-ci sont rappelées au début de la sous-section 6.3.1.

Commençons par exprimer la densité de charge électrique et la densité de courant électrique données ci-dessus, à partir des transformées de Fourier par rapport à l'espace de ces dernières grandeurs. En d'autres termes nous exprimons la densité de charge et la densité courant sous la forme que voici

$$q(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} q(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

et

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \mathbf{j}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

Les grandeurs $q(\mathbf{k}, t)$ et $\mathbf{j}(\mathbf{k}, t)$ qui figurent dans les intégrands des expressions ci-dessus désignent les transformées de Fourier

$$q(\mathbf{k}, t) = Q \exp \left(- \frac{a^2 \mathbf{k}^2}{4} \right) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t))$$

et

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, t) = q(\mathbf{k}, t) \dot{\mathbf{r}}(t) = Q \exp \left(- \frac{a^2 \mathbf{k}^2}{4} \right) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)) \dot{\mathbf{r}}(t)$$

de la densité de charge et de la densité de courant respectivement. Pour le vérifier aisément il suffit de commencer par remarquer que

$$\exp \left(- \frac{\mathbf{x}^2}{a^2} \right) = \left(\frac{a}{2\sqrt{\pi}} \right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \exp \left(- \frac{a^2 \mathbf{k}^2}{4} \right) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

La loi de conservation de la charge électrique 2.59 implique que les transformées de Fourier de la densité de charge et de la densité de courant satisfont à la condition

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{k}, t) + \frac{\partial q(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = 0$$

Venons-en à la détermination du champ électromagnétique produit par la distribution de charge et de courant qui précède. Il convient, ici aussi, d'exprimer le potentiel-vecteur $\mathbf{A}_{ret}(\mathbf{x}, t)$ et le potentiel scalaire $\Phi_{ret}(\mathbf{x}, t)$ qui décrivent ce champ, à partir des transformées de Fourier de ces dernières grandeurs. Autrement dit, pour le potentiel-vecteur, nous écrivons

$$\mathbf{A}_{ret}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \mathbf{A}_{ret}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

$$\text{où} \quad \mathbf{A}_{ret}(\mathbf{k}, t)^* \equiv \mathbf{A}_{ret}(-\mathbf{k}, t)$$

et pour le potentiel scalaire nous écrivons

$$\Phi_{ret}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \Phi_{ret}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

$$\text{où} \quad \Phi_{ret}(\mathbf{k}, t)^* \equiv \Phi_{ret}(-\mathbf{k}, t)$$

Convenons maintenant de nous placer en jauge de Lorenz. Il résulte de manière immédiate de la condition de jauge 5.44 et des équations de champ 5.46 puis 5.45 que les transformées de Fourier $\mathbf{A}_{ret}(\mathbf{k}, t)$ et $\Phi_{ret}(\mathbf{k}, t)$ satisfont à la condition

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{ret}(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_{ret}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = 0$$

ainsi qu'aux équations

$$-\mathbf{k}^2 \mathbf{A}_{ret}(\mathbf{k}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{ret}(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{k}, t)$$

et

$$-\mathbf{k}^2 \Phi_{ret}(\mathbf{k}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_{ret}(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} = -\frac{q(\mathbf{k}, t)}{\varepsilon_0}$$

Il est aisé de vérifier que les expressions qui vont suivre sont des solutions retardées des équations précédentes qui, de plus, satisfont aux conditions de réalité et à la condition de jauge de Lorenz. Pour le potentiel-vecteur

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ret}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{j}(\mathbf{k}, t') \frac{\sin(\omega(\mathbf{k})(t-t'))}{\omega(\mathbf{k})} \\ &= \frac{Q}{\varepsilon_0 \omega(\mathbf{k})} \exp\left(-\frac{a^2 \mathbf{k}^2}{4}\right) \int_{-\infty}^t dt' \dot{\mathbf{r}}(t') \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t')) \sin(\omega(\mathbf{k})(t-t')) \end{aligned}$$

Dans cette expression $\omega(\mathbf{k}) = c \|\mathbf{k}\|$. Pour le potentiel scalaire

$$\begin{aligned}\Phi_{ret}(\mathbf{k}, t) &= \frac{c^2}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^t dt' q(\mathbf{k}, t') \frac{\sin(\omega(\mathbf{k})(t-t'))}{\omega(\mathbf{k})} \\ &= \frac{Q c^2}{\varepsilon_0 \omega(\mathbf{k})} \exp\left(-\frac{a^2 \mathbf{k}^2}{4}\right) \int_{-\infty}^t dt' \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t')) \sin(\omega(\mathbf{k})(t-t'))\end{aligned}$$

La vérification des expressions qui précèdent n'est pas difficile. En effet on constate sans difficulté que la dérivée première par rapport au temps de l'expression du potentiel-vecteur $\mathbf{A}_{ret}(\mathbf{k}, t)$ s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_{ret}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{j}(\mathbf{k}, t') \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin(\omega(\mathbf{k})(t-t'))}{\omega(\mathbf{k})} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{j}(\mathbf{k}, t') \cos(\omega(\mathbf{k})(t-t'))\end{aligned}$$

et, par conséquent, la dérivée seconde par rapport au temps a pour expression celle qui suit, ce qui prouve notre affirmation.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}_{ret}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{j}(\mathbf{k}, t') \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\sin(\omega(\mathbf{k})(t-t'))}{\omega(\mathbf{k})} + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j}(\mathbf{k}, t) \\ &= \frac{-\omega(\mathbf{k})^2}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{j}(\mathbf{k}, t') \frac{\sin(\omega(\mathbf{k})(t-t'))}{\omega(\mathbf{k})} + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j}(\mathbf{k}, t)\end{aligned}$$

Que l'expression de $\mathbf{A}_{ret}(\mathbf{k}, t)$ qui précède fournisse la solution retardée est une constatation immédiate puisque à l'instant t , l'expression du potentiel-vecteur ne dépend que des valeurs du courant pour des temps $t' \leq t$. L'argument qui établit le résultat pour le potentiel scalaire $\Phi_{ret}(\mathbf{k}, t)$ est parfaitement identique.

Détermination de l'expression générale de la force de réaction associée à l'émission de rayonnement

Abordons maintenant le problème de la force de réaction $\mathbf{F}^{rayon}(t)$ du champ électromagnétique rayonné créé par la charge électrique lorsque la vitesse instantanée de celle-ci est nulle. Cette force, à l'instant t , est la force de Lorentz due au champ électromagnétique rayonné. Mais le champ d'induction rayonné ne peut pas contribuer à cette force puisque la vitesse est nulle et donc la densité de courant instantanée aussi. Donc seul contribue le champ électrique. Dans ces conditions

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{rayon}(t) &= \int_{\mathbb{R}^3} dV(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}_{ret}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{k} q(\mathbf{k}, t) \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{E}_{ret}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{k} q(\mathbf{k}, t) \mathbf{E}_{ret}(-\mathbf{k}, t)\end{aligned}$$

dans laquelle le symbole $\mathbf{E}_{ret}(-\mathbf{k}, t)$ désigne la transformée de Fourier du champ électrique à l'instant t . Or l'expression de la transformée de Fourier du champ électrique s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{ret}(\mathbf{k}, t) &= -i\mathbf{k} \Phi_{ret}(\mathbf{k}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_{ret}(\mathbf{k}, t) \\
&= -\frac{c}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^t dt' q(\mathbf{k}, t') \left[\frac{ic\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} \sin(\omega(\mathbf{k})(t-t')) + \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{c} \cos(\omega(\mathbf{k})(t-t')) \right] \\
&= -\frac{Qc}{\varepsilon_0} \exp\left(-\frac{a^2\mathbf{k}^2}{4}\right) \int_{-\infty}^t dt' \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t')) \\
&\times \left[\frac{ic\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} \sin(\omega(\mathbf{k})(t-t')) + \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{c} \cos(\omega(\mathbf{k})(t-t')) \right]
\end{aligned}$$

Par conséquent, il résulte des considérations précédentes que la force de réaction $\mathbf{F}^{rayon}(t)$ du champ électromagnétique produite par la charge électrique animée d'une vitesse instantanée nulle est de la forme suivante

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{rayon}(t) &= \frac{c}{(2\pi)^3 \varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} q(\mathbf{k}, t) \int_{-\infty}^t dt' q(-\mathbf{k}, t') \\
&\times \left[\frac{ic\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} \sin(\omega(\mathbf{k})(t-t')) - \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{c} \cos(\omega(\mathbf{k})(t-t')) \right]
\end{aligned}$$

Compte tenu de la forme explicite de la transformée de Fourier de la densité de charge électrique $q(\mathbf{k}, t)$, on parvient à l'expression finale que voici

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{rayon}(t) &= \frac{Q^2c}{(2\pi)^3 \varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \exp\left(-\frac{a^2\mathbf{k}^2}{2}\right) \int_{-\infty}^t dt' \exp(-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t'))) \\
&\times \left[\frac{ic\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} \sin(\omega(\mathbf{k})(t-t')) - \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{c} \cos(\omega(\mathbf{k})(t-t')) \right]
\end{aligned}$$

Réduction de l'expression de la force de freinage.

La forme de cette expression n'est pas la mieux appropriée pour la suite de la discussion. Pour la transcrire sous une forme plus adaptée commençons par y exprimer les facteurs $\sin(\omega(\mathbf{k})(t-t'))$ et $\cos(\omega(\mathbf{k})(t-t'))$ en termes d'exponentielles $\exp(i\omega(\mathbf{k})(t-t'))$ et $\exp(-i\omega(\mathbf{k})(t-t'))$. Ensuite, ayant groupé les facteurs exponentiels, procédons au changement de variable d'intégration de \mathbf{k} en $-\mathbf{k}$ pour le terme de l'intégrand qui contient le facteur

$$\exp[-i(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t')) - \omega(\mathbf{k})(t-t'))]$$

L'intégrand qui figure dans l'expression qui précède de $\mathbf{F}^{rayon}(t)$ prend la forme finale qui suit

$$\mathbf{F}^{rayon}(t) = \frac{Q^2 c}{(2\pi)^3 \varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{k} \exp\left(-\frac{a^2 \mathbf{k}^2}{2}\right) \int_{-\infty}^t dt' \\ \times \left(\frac{c \mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} - \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{c} \right) \cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')) - \omega(\mathbf{k})(t - t')]$$

Avant de procéder à l'intégration de l'expression précédente intervertissons l'ordre des intégrations relatives aux variables \mathbf{k} et t' . Pour effectuer l'intégration relativement à la variable \mathbf{k} il est commode de faire usage des coordonnées sphériques (k, θ, ϕ) définies comme suit. La variable k est la norme du vecteur \mathbf{k} , l'angle θ est l'angle des vecteurs \mathbf{k} et $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')$ et enfin l'angle ϕ est l'angle azimutal associé à la direction fixée par le vecteur $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')$. Effectuons d'abord l'intégration par rapport à la variable k . Il convient d'introduire le vecteur de norme unité $\mathbf{u}(\theta, \phi) = \mathbf{k}/\|\mathbf{k}\| = c \mathbf{k}/\omega(\mathbf{k})$. L'expression précédente s'écrit dès lors

$$\mathbf{F}^{rayon}(t) = \frac{Q^2 c}{(2\pi)^3 \varepsilon_0} \int_{-\infty}^t dt' \int_{S_2} d\Omega(\theta, \phi) \int_0^{+\infty} k^2 dk \exp\left(-\frac{a^2 k^2}{2}\right) \\ \times \left(\mathbf{u}(\theta, \phi) - \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{c} \right) \cos[k(\mathbf{u}(\theta, \phi) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')) - c(t - t'))]$$

Or, comme il est aisé de le vérifier,

$$\int_0^{+\infty} dk \exp\left(-\frac{a^2 k^2}{2}\right) \cos(kz) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp\left(-\frac{a^2 k^2}{2}\right) \exp(ikz) \\ = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp\left(-\frac{(ak - iz/a)^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\right)$$

et par voie de conséquence

$$\int_0^{+\infty} k^2 dk \exp\left(-\frac{a^2 k^2}{2}\right) \cos(kz) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^{+\infty} dk \exp\left(-\frac{a^2 k^2}{2}\right) \cos(kz) \\ = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^3} \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\right)$$

Donc, après intégration de l'expression ci-dessus relativement à la variable k , cette expression prend la forme suivante dans laquelle, pour alléger l'écriture, il a été convenu de poser

$$z = \mathbf{u}(\theta, \phi) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')) - c(t - t')$$

Ainsi

$$\mathbf{F}^{rayon}(t) = \frac{Q^2 c}{(2\pi)^3 \varepsilon_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^3} \int_{-\infty}^t dt' \\ \times \int_{S_2} d\Omega(\theta, \phi) \left(\mathbf{u}(\theta, \phi) - \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{c} \right) \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\right)$$

Pour effectuer les intégrations relatives aux angles θ et ϕ , il convient de développer le facteur,

$$\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\right)$$

qui figure dans l'intégrant, en série de puissance par rapport à la variable

$$\frac{\mathbf{u}(\theta, \phi) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t'))}{c(t - t')}$$

Dans ce but, on commence par considérer le développement de Taylor de la fonction $(1 - u^2) \exp(-u^2/2)$ autour de la valeur $-c(t - t')/a$, ce qui permet d'écrire le développement que voici

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\right) \\ = & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\mathbf{u}(\theta, \phi) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t'))}{a} \right]^n \frac{d^n}{du^n} (1 - u^2) \exp(-u^2/2) \Big|_{u=-c(t-t')/a} \end{aligned}$$

Ensuite, il est aisé de transcrire ce dernier développement sous la forme souhaitée qui suit

$$\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{\mathbf{u}(\theta, \phi) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t'))}{c(t - t')} \right]^n h_n\left(\frac{c(t - t')}{a}\right)$$

où le symbole $h_n(u)$, avec n entier positif ou nul, désigne la fonction suivante

$$h_n(u) = \frac{(-1)^n u^n}{n!} \frac{d^n}{du^n} (1 - u^2) \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Il sera utile pour la suite de disposer des expressions explicites des deux premières de ces fonctions. Les voici

$$h_0(u) = (1 - u^2) \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad , \quad h_1(u) = (3u^2 - u^4) \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad , \quad \dots$$

Or,

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} d\Omega(\theta, \phi) \left[\frac{\mathbf{u}(\theta, \phi) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t'))}{c(t - t')} \right]^n \\ = & \left[\frac{\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')\|}{c(t - t')} \right]^n \int_{S_2} d\Omega(\theta, \phi) (\cos(\theta))^n \\ = & \begin{cases} \frac{4\pi}{n+1} \left[\frac{\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')\|}{c(t - t')} \right]^n & \text{lorsque } n = 0, 2, 4, \dots \\ 0 & \text{lorsque } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{S_2} d\Omega(\theta, \phi) \mathbf{u}(\theta, \phi) \left[\frac{\mathbf{u}(\theta, \phi) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t'))}{c(t-t')} \right]^n \\
= & \left[\frac{\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')\|}{c(t-t')} \right]^n \int_{S_2} d\Omega(\theta, \phi) \mathbf{u}(\theta, \phi) (\cos(\theta))^n \\
= & \begin{cases} 0 & \text{lorsque } n = 0, 2, 4, \dots \\ \frac{4\pi}{n+2} \left[\frac{\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')\|}{c(t-t')} \right]^{n-1} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')}{c(t-t')} & \text{lorsque } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

L'introduction des résultats qui viennent d'être établis dans l'expression de $\mathbf{F}^{rayon}(t)$ de la force de réaction conduit à l'expression suivante pour cette force

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{rayon}(t) &= \frac{Q^2 c}{(2\pi)^3 \varepsilon_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^3} \int_{-\infty}^t dt' \\
& \left[\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')}{c(t-t')} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{+\infty} \frac{4\pi}{n+2} \left[\frac{\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')\|}{c(t-t')} \right]^{n-1} h_n\left(\frac{c(t-t')}{a}\right) \right. \\
& \left. - \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{c} \sum_{n=0,2,4,\dots}^{+\infty} \frac{4\pi}{n+1} \left[\frac{\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')\|}{c(t-t')} \right]^n h_n\left(\frac{c(t-t')}{a}\right) \right]
\end{aligned}$$

qui, moyennant quelques manipulations formelles, se présente sous la forme qui suit, plus appropriée à la suite de la discussion

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{rayon}(t) &= \frac{Q^2 c}{(2\pi)^3 \varepsilon_0} 4\pi \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^3} \int_{-\infty}^t dt' \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')\|^{2j}}{c^{2j} (t-t')^{2j}} \\
& \times \left[\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')}{c(t-t')} \frac{1}{2j+3} h_{2j+1}\left(\frac{c(t-t')}{a}\right) - \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{c} \frac{1}{2j+1} h_{2j}\left(\frac{c(t-t')}{a}\right) \right]
\end{aligned}$$

Si l'on tient maintenant compte de l'hypothèse faite au sujet de la vitesse de déplacement de la charge rapportée à celle de la lumière, alors

$$\frac{\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')\|}{c|t-t'|} \ll 1$$

et l'importance de la contribution des termes qui figurent dans l'intégrand de l'expression qui précède décroît lorsque l'exposant $2j$ croît. Limitons donc la somme qui figure dans cette expression au premier terme qui y figure, donc au terme d'indice $j = 0$. Dans ces conditions

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{rayon}(t) &= \frac{Q^2 c}{(2\pi)^{3/2} \varepsilon_0} \frac{1}{a^3} \\
& \times \int_{-\infty}^t dt' \left[\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')}{c(t-t')} \frac{1}{3} h_1\left(\frac{c(t-t')}{a}\right) - \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{c} h_0\left(\frac{c(t-t')}{a}\right) \right]
\end{aligned}$$

Pour terminer introduisons les développements de Taylor suivants dans l'expression qui précède de manière à obtenir un résultat final dans lequel ne figure que les caractéristiques du mouvement de la charge à l'instant t . Compte tenu du fait que $\dot{\mathbf{r}}(t) = 0$ pour le premier terme qui figure dans l'intégrant on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t')}{t - t'} &= -\ddot{\mathbf{r}}(t) \frac{(t - t')}{2} + \dddot{\mathbf{r}}(t) \frac{(t - t')^2}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{d^n \mathbf{r}(t)}{dt^n} \frac{(t - t')^{n-1}}{n!}\end{aligned}$$

et pour le second terme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}(t') &= \ddot{\mathbf{r}}(t) (t' - t) + \dddot{\mathbf{r}}(t) \frac{(t' - t)^2}{2!} + \dots \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{d^n \mathbf{r}(t)}{dt^n} \frac{(t - t')^{n-1}}{(n-1)!}\end{aligned}$$

Après introduction des développements ci-dessus dans l'intégrant de l'expression plus haut on obtient, après réduction, une expression de la force de réaction à l'instant t sous la forme d'une série dont chaque terme est associé à une dérivée d'ordre n de la position $\mathbf{r}(t)$ par rapport au temps. Plus précisément

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{rayon}(t) &= \frac{Q^2}{(2\pi)^{3/2} \varepsilon_0} \frac{1}{a^3} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{d^n \mathbf{r}(t)}{dt^n} \\ &\times \int_{-\infty}^t dt' \frac{(t - t')^{n-1}}{(n-1)!} \left[\frac{1}{3n} h_1\left(\frac{c(t - t')}{a}\right) - h_0\left(\frac{c(t - t')}{a}\right) \right]\end{aligned}$$

ce qui peut être finalement écrit sous la forme suivante

$$\mathbf{F}^{rayon}(t) = \frac{Q^2}{(2\pi)^{3/2} \varepsilon_0} \frac{1}{a^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d^n \mathbf{r}(t)}{dt^n} \frac{a^n}{c^n} g_n$$

où on a posé

$$\begin{aligned}g_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_{-\infty}^t \frac{c dt'}{a} \frac{c^{n-1} (t - t')^{n-1}}{a^{n-1}} \left[\frac{1}{3n} h_1\left(\frac{c(t - t')}{a}\right) - h_0\left(\frac{c(t - t')}{a}\right) \right] \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} du u^{n-1} \left[\frac{1}{3n} h_1(u) - h_0(u) \right]\end{aligned}$$

puis procédé au changement de variable d'intégration de t' en $u = c(t - t')/a$. Dans la suite, seuls seront utiles les coefficients g_1 , g_2 et g_3 . Les autres coefficients sont associés à des termes qui s'annulent à la limite $a \rightarrow +0$. Les valeurs des coefficients utiles sont

$$\begin{aligned}
g_1 &= \int_0^{+\infty} du \left[\frac{1}{3}(3u^2 - u^4) - (1 - u^2) \right] \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) = 0 \\
g_2 &= - \int_0^{+\infty} du u \left[\frac{1}{6}(3u^2 - u^4) - (1 - u^2) \right] \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) = -\frac{2}{3} \\
g_3 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} du u^2 \left[\frac{1}{9}(3u^2 - u^4) - (1 - u^2) \right] \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{3}
\end{aligned}$$

Par conséquent la valeur de la force de réaction est donnée par la formule que voici

$$\mathbf{F}^{rayon}(t) = \frac{Q^2}{(2\pi)^{3/2}\varepsilon_0} \frac{1}{a^3} \left[\ddot{\mathbf{r}}(t) \frac{a^2}{c^2} g_2 + \ddot{\mathbf{r}}(t) \frac{a^3}{c^3} g_3 + O(a^4) \right]$$

ou, plus précisément, par la *formule finale*

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^{rayon}(t) &= \frac{Q^2}{(2\pi)^{3/2}\varepsilon_0} \left[-\frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{r}}(t)}{c^2} \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{2\pi}}{3} \frac{\ddot{\mathbf{r}}(t)}{c^3} + O(a)\dots \right] \\
&= \frac{Q^2}{6\pi\varepsilon_0} \left[-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\ddot{\mathbf{r}}(t)}{a c^2} + \frac{\ddot{\mathbf{r}}(t)}{c^3} + O(a) + \dots \right]
\end{aligned}$$

Les commentaires que nécessite ce résultat ont été formulés à la suite de l'énoncé de l'exercice.

Exercice 7.10

On considère un milieu homogène et isotrope de constante diélectrique ε dont la perméabilité magnétique est celle du vide μ_0 . La vitesse de phase $u = \sqrt{1/\varepsilon\mu_0}$ des ondes électromagnétique dans ce milieu est inférieure à la vitesse c de la lumière dans le vide. On demande de déterminer le champ électromagnétique produit dans ce milieu par une charge électrique ponctuelle animée d'une vitesse \mathbf{v} constante et telle que $u < \|\mathbf{v}\| < c$. En fait, dans de telles circonstances le mouvement uniforme de la charge électrique produit un rayonnement. Ce rayonnement est appelé *rayonnement Cherenkov*.²

Indications : Pour traiter cet exercice il convient d'adopter une démarche qui est l'analogie de celle qui est adoptée au long de la sous-section 7.3.1. Il s'agit en particulier, partant de l'expression (7.37), de reprendre la discussion des solutions auxquelles conduisent les formules (7.38) et (7.39).

Les résultats établis à la sous-section 7.3.1 peuvent être étendus sans difficulté au cas d'un milieu linéaire isotrope et homogène de susceptibilité électrique ε et de perméabilité magnétique μ . Il suffit de remplacer ε_0 par ε , μ_0 par μ et c par $u = (\sqrt{\varepsilon\mu})^{-1}$ dans la définition (7.43) et dans les expressions (7.46) et (7.47) pour obtenir les potentiels retardés correspondant à cette nouvelle situation et de même dans les expressions (7.50) pour obtenir le champ électrique et

2. En fait, l'orthographe d'origine est Čerenkov en serbo-croate. Voir McGraw Hill. Dictionary of Science and Technology Terms. Mais, il était en fait russe et selon plusieurs auteurs on peut utiliser l'orthographe adoptée ici

le champ d'induction associés. Or, dans les milieux linéaires, la vitesse de phase u de la lumière, est toujours inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide. Par conséquent un porteur de charge électrique peut s'y déplacer avec une vitesse $\|\mathbf{v}\|$ plus grande que cette dernière vitesse de phase $u < c$ des ondes électromagnétiques dans le milieu matériel considéré. Dans ces conditions on vérifie que la charge émet un rayonnement même lorsque le mouvement qui l'anime peut être assimilé à un mouvement de translation uniforme.

La détermination du champ électromagnétique d'une charge électrique ponctuelle se mouvant avec une vitesse pratiquement constante \mathbf{v} dans un milieu ε, μ avec $u \leq \|\mathbf{v}\| < c$ est un problème qui, du point de vue mathématique, est parfaitement similaire au problème "académique" qui consiste, dans le cas du vide, à déterminer le champ prédit par les équations de Maxwell pour une charge électrique animée d'un mouvement de translation uniforme de vitesse \mathbf{v} telle que $\|\mathbf{v}\| \geq c$. Il sera donc commode (pour éviter la transcription des formules et des définitions déjà introduites) de commencer par considérer le problème académique".

Commentaires :

Un courant électrique est généralement dû au déplacement de particules chargées. Il s'agit d'un courant convectif et un tel courant ne peut pas produire de rayonnement Cherenkov dans le vide puisque la vitesse de déplacement des particules qui le constituent est toujours inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide. En revanche un courant qui n'est pas convectif peut produire un effet Cherenkov dans le vide. Ce serait typiquement le cas d'un courant "fictif" dû à un effet de polarisation. Une première image d'un tel phénomène serait de créer une zone de polarisation électrique simulant un déplacement à une vitesse supérieure à celle de la lumière dans le vide. C'est ce que l'on pourrait produire par balayage d'une surface plane par un faisceau incident de particules ou encore de lumière sur une surface. En fait on peut obtenir un tel effet en produisant un effet Cherenkov dans un milieu matériel par exemple semi-infini limité par un plan. L'angle de la trajectoire des particule avec ce plan est tel que les points d'intersection du cône Cherenkov avec la surface du milieu matériel se déplace plus vite que la lumière dans le vide et y créant un effet de polarisation. Cet effet de polarisation (donc assimilable à l'effet d'une distribution de charge électrique fictive) génère alors un effet Cherenkov dans le milieu semi-infini que constitue le vide.

Un autre commentaire important est le suivant. Jusqu'ici nous ne nous sommes pas penché sur la manière dont la formulation de l'électrodynamique était retranscrite lors d'un changement de référentiel. En fait il s'agit là d'un problème qui a préoccupé de nombreux physiciens (et mathématiciens) à l'ultime fin du 19 ième siècle et au tout début du 20 ième siècle et qui fut évoqué sous le nom d'électrodynamique des corps en mouvement. Parmi les scientifiques qui y ont largement contribué il y a lieu de citer H.A. Lorentz et H. Poincaré qui ont joué un rôle déterminant dans les développements qui ont permis d'apporter une solution à ce problème qui a conduit dans sa phase ultime à la formulation de la théorie de la Relativité restreinte par A. Einstein. Dans cet exposé ayant choisi un développement qui suit l'évolution historique nous ne

disposerons de la théorie de la Relativité restreinte qu'au chapitre 8 et pour l'instant nous sommes contraints à des développements ne faisant pas intervenir de changement de référentiel. Cela a pour conséquence d'alourdir considérablement certains développements, notamment ceux qui sont présentés aux sous-sections 7.3.2 et surtout 7.3.3 et 7.3.4.

Solution :

Revenons au problème que nous souhaitons aborder. Il s'agit de nouveau de déterminer le potentiel retardé $\Phi_{ret}(\mathbf{x}, t)$ dont l'expression figure sous (7.38) et le potentiel-vecteur retardé $\mathbf{A}_{ret}(\mathbf{x}, t)$ dont l'expression figure sous (7.39), mais cette fois lorsque la vitesse de déplacement de la charge électrique $\|\mathbf{v}\|$ est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide. La démarche du calcul est quasiment le même que lorsque $\|\mathbf{v}\| < c$. Le fait nouveau est que maintenant l'équation (7.41) ne possède de solutions réelles $t - t_0(\mathbf{x}, t)$ que si

$$\rho^2 \geq \frac{v^2 \rho^2 - (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\rho})^2}{c^2} \quad \text{autrement dit si} \quad \|\boldsymbol{\rho}\| \geq \frac{\|\mathbf{v}\|}{c} \|\boldsymbol{\rho}_\perp\|$$

Cette dernière condition peut finalement être exprimée sous la forme que voici

$$\frac{\|\boldsymbol{\rho}_\perp\|}{\|\boldsymbol{\rho}\|} \leq \frac{c}{\|\mathbf{v}\|} \equiv \sin \theta_{Cherenkov}$$

dans laquelle le symbole $\theta_{Cherenkov} = \arcsin(c/\|\mathbf{v}\|)$ désigne un angle appelé **angle de Cherenkov**. Si la condition énoncée ci-dessus est satisfaite, l'équation (7.41) possède une ou deux solutions réelles de même signe. En vertu des formules de Viète ces solutions sont positives si et seulement si

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\rho} \leq 0$$

Ces solutions s'écrivent

$$t - t_0(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v}/c \pm R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})}{1 - v^2/c^2} \geq 0$$

où

$$R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v}) = \sqrt{\rho^2 - \frac{v^2}{c^2} \rho_\perp^2} = \frac{\sqrt{\rho^2 (\sin \theta_{Cherenkov})^2 - \rho_\perp^2}}{\sin \theta_{Cherenkov}}$$

Les deux racines précédentes de l'équation (7.41) sont donc réelles positives et distinctes si

$$\|\boldsymbol{\rho}_\perp\| < \|\boldsymbol{\rho}\| \sin \theta_{Cherenkov} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v} < 0,$$

Elles sont réelles positives et confondues si

$$\|\boldsymbol{\rho}_\perp\| = \|\boldsymbol{\rho}\| \sin \theta_{Cherenkov} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v} < 0$$

En particulier celles-ci sont confondues et nulles si $\|\boldsymbol{\rho}\| = 0$.

L'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{\rho}$ pour lesquels les conditions ci-dessus sont vérifiées correspond à une région de l'espace délimité par un cône d'angle au sommet $\theta_{Cherenkov}$ et dont le sommet est bien évidemment la position de la charge électrique. Ce cône est appelé *cône retardé de Cherenkov*. La figure 7.1 en donne une image.

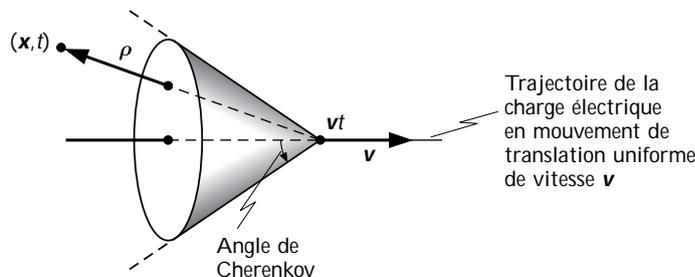


FIGURE 7.1 – Cône retardé de Cherenkov associé à une charge électrique ponctuelle animée d'une vitesse constante \boldsymbol{v} supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide

Lorsque le vecteur $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v} t$ est extérieur au cône retardé de Cherenkov, c'est-à-dire lorsque l'angle des vecteurs $-\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{\rho}$ est supérieur à l'angle de Cherenkov $\theta_{Cherenkov}$, il n'existe pas de vecteur $\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v} t_0(\boldsymbol{x}, t)$ qui vérifie l'équation (7.40). La figure 7.2 fournit une vision géométrique de la résolution de l'équation (7.40) lorsque la vitesse de déplacement de la charge électrique est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide.

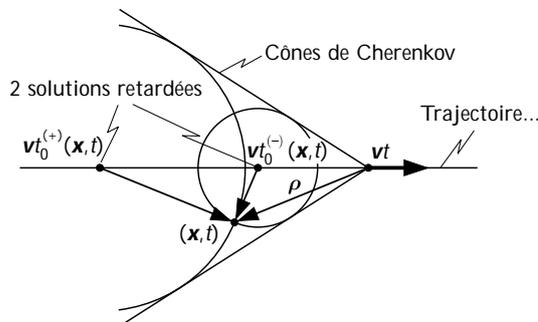


FIGURE 7.2 – Visualisation géométrique des deux solutions retardées $\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v} t_0^{\pm}(\boldsymbol{x}, t)$ de l'équation (7.40) lorsque la vitesse de déplacement de la charge électrique \boldsymbol{v} est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide.

L'interprétation de la situation est claire ; les points pour lesquels le vecteur $\boldsymbol{\rho}$ est à l'extérieur du cône retardé de Cherenkov ne sont pas atteints (à l'instant t) par le champ électromagnétique produit par la charge. A l'extérieur du cône retardé de Cherenkov le champ électromagnétique est donc nul (de même que les potentiels retardés). La figure 7.3 illustre cette dernière remarque.

Lorsque le vecteur $\boldsymbol{\rho}$ est à l'intérieur du cône retardé Cherenkov, c'est-à-dire lorsque l'angle des vecteurs $-\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{\rho}$ est inférieur à l'angle de Cherenkov $\theta_{Cherenkov}$, on peut reproduire pour chacune des solutions $\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{x}, t)$ la même démarche de calcul que celle qui suit l'équation (7.41). On est ainsi conduit au résultat final que constituent les expressions du potentiel scalaire retardé $\Phi_{ret}(\boldsymbol{x}, t)$

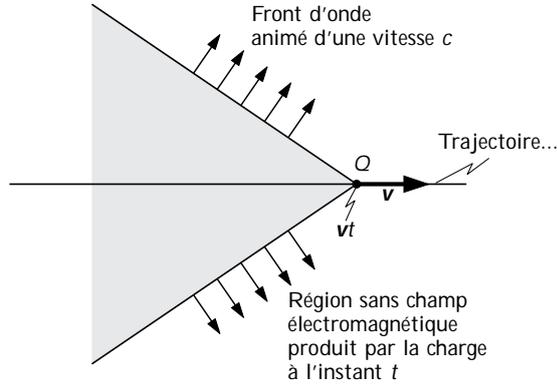


FIGURE 7.3 – L'intérieur du cône de Cherenkov et le cône lui-même constitue la région dans laquelle se manifeste le champ électromagnétique attaché à la charge électrique.

et du potentiel-vecteur retardé $\mathbf{A}_{ret}(\mathbf{x}, t)$. On obtient ainsi, pour chacune des solutions $\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t)$ de l'équation (7.40), une même contribution de la forme (7.42) et (7.43) dans la mesure où nous sommes assurés que $v^1 = \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v} \neq c$, ce qui est bien le cas lorsque le vecteur $\boldsymbol{\rho}$ appartient à l'intérieur du cône retardé de Cherenkov. Lorsque

$$\|\boldsymbol{\rho}_\perp\| < \|\boldsymbol{\rho}\| \sin \theta_{Cherenkov} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{v} < 0$$

on parvient finalement aux expressions que voici pour le potentiel scalaire et pour le potentiel-vecteur.

$$\Phi_{ret}(\mathbf{x}, t) = \frac{2Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})}$$

$$\mathbf{A}_{ret}(\mathbf{x}, t) = \frac{2Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{v}}{R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})}$$

La détermination du champ électrique et du champ d'induction qui découle de ces résultats peut être menée en complète analogie avec le cas $\|\mathbf{v}\| < c$. Il vient

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{2Q}{4\pi \varepsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\boldsymbol{\rho}}{R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})^3} \quad \text{et} \quad \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$$

Rappelons que l'expression de la grandeur $R(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{v})$ est donnée sous (7.43).

Ces résultats nécessitent quelques commentaires. On commencera par remarquer que le champ électrique est radial par rapport à la charge électrique mais de signe opposé à celui de la charge, ceci à l'intérieur du cône retardé de Cherenkov bien entendu. En fait, sur le plan formel, ce champ électrique radial affiche la dépendance suivante, décrite par les figures 7.4, en fonction de l'angle θ que forment les vecteurs $\boldsymbol{\rho}$ et $-\mathbf{v}$

Vu le comportement singulier du champ électrique à l'intérieur du cône de Cherenkov retardé au voisinage de ce dernier, la contribution au flux du champ de déplacement électrique \mathbf{D} au travers de la sphère centrée sur la charge et munie de l'orientation convenue, est infini et de signe opposé à celui de la charge.

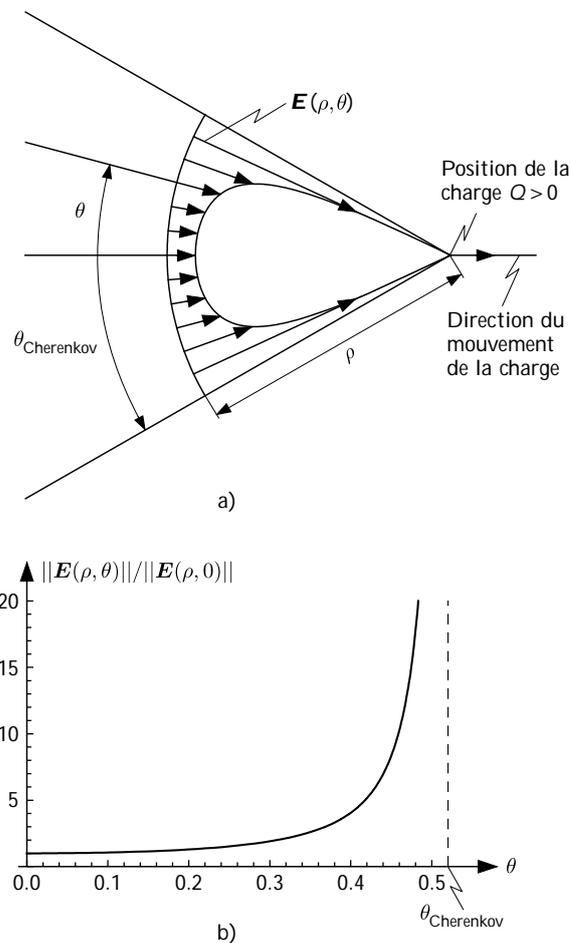


FIGURE 7.4 – Ces deux figures montrent la variations du champ électrique radial, à l'intérieur du cône retardé de Cherenkov en fonction de l'angle θ , pour une charge électrique animée d'une vitesse de translation uniforme supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide.

Le théorème de Gauss implique donc que, sur la surface du cône retardé de Cherenkov, il existe un champ électrique radial de signe en accord avec le signe de la charge mais hautement singulier de manière que la contribution totale au flux du champ de déplacement \mathbf{D} apportée par l'intersection de la sphère et du cône retardé Cherenkov est infinie mais positive et telle que le théorème de Gauss est satisfait. Nous nous limiterons à ces constatations car nous ne disposons pas de l'outil mathématique qui permet l'étude de ces singularités du champ électromagnétique sur le cône retardé de Cherenkov. Une possibilité (laborieuse) s'offre néanmoins à nous. Il s'agirait de déterminer la forme du champ électromagnétique associée à la distribution gaussienne (7.37) de la charge avant de passer à la limite de la charge électrique ponctuelle en faisant tendre la grandeur a vers 0. On pourrait ainsi étudier la "naissance" des singularités du cône retardé de Cherenkov en faisant tendre la grandeur a vers 0. Ensuite, on notera que la charge électrique rayonne mais l'évaluation de ce rayonnement nous met à nouveau

aux prises avec les difficultés inhérentes aux singularités du champ. Enfin il est facile de constater que, dans ce cas, les potentiels avancés et retardés diffèrent. Pour les potentiels avancés les calculs sont similaires à ceux qui viennent d'être effectués. Le champ électromagnétique associé aux potentiels avancés règne à l'intérieur d'un cône avancé de Cherenkov orienté vers l'avant. Voilà pour ce qui concerne le problème "académique" évoqué précédemment.

L'effet Cherenkov en milieu linéaire ε , μ sera obtenu en remplaçant, dans ce qui précède, ε_0 par ε et μ_0 par μ et bien sûr la vitesse de la lumière c sera remplacée par $u = (\sqrt{\varepsilon\mu})^{-1}$. Dans ces conditions l'angle de Cherenkov est donné par l'expression

$$\sin \theta_{Cherenkov} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}\|\mathbf{v}\|} = \frac{c}{n\|\mathbf{v}\|}$$

où \mathbf{v} désigne la vitesse de la charge et où

$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}$$

désigne l'indice de réfraction du milieu par rapport au vide. Enfin comme $\|\mathbf{v}\| < c$ on a la valeur maximum de l'angle de Cherenkov donnée par

$$\theta_{Cherenkov} \leq \arcsin \frac{1}{n}$$

Finalement, il faut dire que l'effet Cherenkov a lieu dans des milieux dispersifs. La constante diélectrique dépend en fait de la fréquence ce qui a pour conséquence d'"estomper" les singularités du front d'ondes électromagnétiques sur le cône Cherenkov. Pour l'étude du cas $\|\mathbf{v}\| = c$ (c'est-à-dire $\|\mathbf{v}\| = u$) on prendra garde de ne pas effectuer de passage à la limite à partir des deux cas étudiés ici qui sont : $\|\mathbf{v}\| < u$ et $\|\mathbf{v}\| > u$.

Chapitre 8

Solutions des exercices du chapitre 8

Exercice 8.1

Soient deux matrices Λ_1 et Λ_2 qui caractérisent deux transformations de Lorentz.

1. Montrer que le produit $\Lambda_1 \Lambda_2$ caractérise une transformation de Lorentz.
2. Montrer que la matrice inverse Λ^{-1} d'une transformation de Lorentz Λ caractérise une transformation de Lorentz.
3. Montrer que le composé de deux transformations de Lorentz orthochrones, de même que l'inverse d'une telle transformation, sont orthochrones. Établir les mêmes résultats pour les transformations de Lorentz orthochrones propres.
4. Notons (a, Λ) une transformation de Poincaré. Montrer que

$$(a_1, \Lambda_1) \circ (a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2)$$

et

$$(a, \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1})$$

Solution :

1. Il suffit de montrer que les éléments de la matrice $\Lambda_1 \Lambda_2$ satisfont à la condition (8.40). En effet, pour tous λ et ρ ,

$$\begin{aligned} & (\Lambda_1 \Lambda_2)^\mu_\lambda (\Lambda_1 \Lambda_2)^\nu_\rho g_{\mu\nu} = (\Lambda_1)^\mu_\sigma (\Lambda_2)^\sigma_\lambda (\Lambda_1)^\nu_\tau (\Lambda_2)^\tau_\rho g_{\mu\nu} \\ = & (\Lambda_2)^\sigma_\lambda (\Lambda_2)^\tau_\rho \left[(\Lambda_1)^\mu_\sigma (\Lambda_1)^\nu_\tau g_{\mu\nu} \right] = (\Lambda_2)^\sigma_\lambda (\Lambda_2)^\tau_\rho g_{\sigma\tau} = g_{\lambda\rho} \end{aligned}$$

2. En effet, $\forall \Lambda \in \mathcal{L}$,

$$\Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\rho g_{\mu\nu} = g_{\lambda\rho} \quad \Rightarrow \quad g_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\lambda{}_\mu (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu g_{\lambda\rho}$$

3. En vertu de la relation (8.45) pour toute transformation de Lorentz $(\Lambda^{-1})^4{}_4 = \Lambda^4{}_4$. Par conséquent si une transformation de Lorentz est orthochrone la transformation inverse de celle-ci l'est également.

Pour montrer que le composé de deux transformations de Lorentz orthochrones est une transformation de Lorentz orthochrone il est équivalent de montrer que le composé de l'inverse d'une transformation de Lorentz orthochrone Λ_1 avec une transformation de Lorentz orthochrone Λ_2 est une transformation de Lorentz orthochrone. Autrement dit il suffit de montrer que

$$(\Lambda_1^{-1} \Lambda_2)^4{}_4 = (\Lambda_1^{-1})^4{}_\mu (\Lambda_2)^\mu{}_4 > 0$$

Compte tenu de (8.45)

$$\begin{aligned} (\Lambda_1^{-1} \Lambda_2)^4{}_4 &= (\Lambda_1^{-1})^4{}_4 (\Lambda_2)^4{}_4 + (\Lambda_1^{-1})^4{}_i (\Lambda_2)^i{}_4 \\ &= (\Lambda_1)^4{}_4 (\Lambda_2)^4{}_4 - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^3 (\Lambda_1)^i{}_4 (\Lambda_2)^i{}_4 \end{aligned}$$

puisque $(\Lambda_1^{-1})^4{}_i = -(\Lambda_1)^i{}_4/c^2$. Par ailleurs, en vertu des relations (8.40),

$$\begin{aligned} (\Lambda_1)^4{}_4 &= \frac{1}{c} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^3 ((\Lambda_1)^i{}_4)^2} < \frac{1}{c} \sqrt{\sum_{i=1}^3 ((\Lambda_1)^i{}_4)^2} \\ (\Lambda_2)^4{}_4 &= \frac{1}{c} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^3 ((\Lambda_2)^i{}_4)^2} < \frac{1}{c} \sqrt{\sum_{i=1}^3 ((\Lambda_2)^i{}_4)^2} \end{aligned}$$

Dans ces conditions

$$(\Lambda_1^{-1} \Lambda_2)^4{}_4 > \frac{1}{c^2} \left[\sqrt{\sum_{i=1}^3 ((\Lambda_1)^i{}_4)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^3 ((\Lambda_2)^i{}_4)^2} - \sum_{i=1}^3 (\Lambda_1)^i{}_4 (\Lambda_2)^i{}_4 \right] > 0$$

Cette dernière expression est positive en vertu de l'inégalité de Schwarz.

Puisque, pour toutes transformations de Lorentz propres Λ , Λ_1 et Λ_2 on a

$$\det \Lambda^{-1} = \det \Lambda^{-1} = 1 \quad \text{et} \quad \det \Lambda_1 \Lambda_2 = \det \Lambda_1 \det \Lambda_2 = 1$$

l'inverse d'une transformation de Lorentz propre est une transformation de Lorentz propre et le composé de deux transformations de Lorentz propres est une transformation de Lorentz propre.

4. En vertu de la définition (8.15), pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\begin{aligned} (a_1, \Lambda_1) \circ (a_2, \Lambda_2) x &= (a_1, \Lambda_1) (a_2 + \Lambda_2 x) = a_1 + \Lambda_1 (a_2 + \Lambda_2 x) \\ &= a_1 + \Lambda_1 a_2 + \Lambda_1 \Lambda_2 x = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2) x \end{aligned}$$

De ce dernier résultat on déduit immédiatement que

$$(-\Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1}) \circ (a, \Lambda) = (-\Lambda^{-1} a + \Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1} \Lambda) = (0, \mathbb{I})$$

ce qui achève la démonstration du point 4.

Exercice 8.2

Montrer qu'il existe une transformation de Lorentz orthochrone propre qui applique le quadrivecteur $n_0 = (0, 0, 0, 1)$ sur n'importe quel quadrivecteur n tel que $g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -c^2$ et $n^4 \geq 1$ et que cette transformation de Lorentz peut s'écrire comme le produit d'une transformation de Lorentz pure $\Lambda(\mathbf{v}_0)$ qui applique le quadrivecteur n_0 sur $(0, 0, c \sqrt{(n^4)^2 - 1}, n^4)$ suivie d'une rotation qui applique le vecteur $(0, 0, c \sqrt{(n^4)^2 - 1})$ sur le vecteur \mathbf{n} . Quels sont les degrés de liberté qui restent disponibles dans le choix de la rotation.

Solution :

La forme générale d'une transformation de Lorentz pure $\Lambda(\mathbf{v})$ est donnée par (8.54). Une telle transformation $\Lambda(\mathbf{v}_0)$ applique n_0 sur $(0, 0, c \sqrt{(n^4)^2 - 1}, n^4)$ si et seulement si

$$\gamma(\mathbf{v}_0) (-\mathbf{v}_0) = (0, 0, c \sqrt{(n^4)^2 - 1})$$

autrement dit si et seulement si

$$\mathbf{v}_0 = (0, 0, v_0^3) \quad \text{où} \quad v_0^3 = -c \frac{\sqrt{(n^4)^2 - 1}}{n^4}$$

Si $\Lambda(n_0 \rightarrow n)$ désigne une transformation de Lorentz orthochrone propre telle que $\Lambda(n_0 \rightarrow n) n_0 = n$ alors le produit $\Lambda(n_0 \rightarrow n) \Lambda(\mathbf{v}_0)^{-1}$ est une transformation de Lorentz orthochrone propre qui applique le quadrivecteur $(0, 0, c \sqrt{(n^4)^2 - 1}, n^4)$ sur le quadrivecteur n . C'est par conséquent une rotation $R(\mathbf{e}_\perp \rightarrow \mathbf{n})$ qui applique le vecteur $(0, 0, c \sqrt{(n^4)^2 - 1})$ sur le vecteur \mathbf{n} .

$$\Lambda(n_0 \rightarrow n) = R(\mathbf{e}_\perp \rightarrow \mathbf{n}) \Lambda(\mathbf{v}_0)$$

Cette rotation $R(\mathbf{e}_\perp \rightarrow \mathbf{n})$ est définie à une rotation d'axe $\check{\mathbf{e}}_3$ à droite près ou à une rotation d'axe $\check{\mathbf{n}}$ à gauche près.

Exercice 8.3

Soit un quadrivecteur n tel que $g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = -c^2$ et $n^4 > 0$. Montrer qu'il existe une transformation de Lorentz pure, univoquement définie et notée $\Lambda(n)$, telle que $\Lambda(n) n_0 = n$ où $n_0 = (0, 0, 0, 1)$.

Montrer ensuite que toute transformation de Lorentz orthochrone propre Λ s'écrit de manière univoque sous la forme $\Lambda = \Lambda(n) R(n, \Lambda)$ où $n = \Lambda n_0$ et où $R(n, \Lambda)$ désigne une rotation.

Solution :

Si lon se réfère à la forme générale des transformations de Lorentz pures exprimées par les relations (8.40) on constate que la transformation de Lorentz pure $\Lambda(\mathbf{v})$ qui applique le quadrivecteur n_0 sur le quadrivecteur n doit satisfaire à la condition

$$(\mathbf{n}_0)_\perp + \gamma(\mathbf{v})((\mathbf{n}_0)_\parallel - \mathbf{v} n_0^4) \equiv -\gamma(\mathbf{v}) \mathbf{v} = \mathbf{n}$$

et

$$\gamma(\mathbf{v})\left(n_0^4 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_0}{c^2}\right) \equiv \gamma(\mathbf{v}) = n^4$$

La solution de ces équations est unique. De la seconde il découle que

$$\frac{\|\mathbf{v}\|}{c} = \frac{\sqrt{(n^4)^2 - 1}}{n^4} < 1$$

et de la première il suit alors que

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{n}}{\gamma(\mathbf{v})} = -\frac{\mathbf{n}}{n^4}$$

Soit Λ une transformation de Lorentz orthochrone propre. Posons $n = \Lambda n_0$. Par conséquent $g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = -c^2$ et $n^4 > 0$. De plus $\det \Lambda = 1$. Il existe par conséquent une transformation de Lorentz pure unique $\Lambda(-\mathbf{n}/n^4)$, que nous notons $\Lambda(n)$, telle que

$$\Lambda(n)^{-1} \Lambda n_0 = n_0 \quad \text{et par conséquent} \quad \Lambda(n)^{-1} \Lambda = R(n, \Lambda)$$

où le symbole $R(n, \Lambda)$ désigne une matrice de rotation (agissant sur dans l'espace \mathbb{R}^4 en laissant inchangée la coordonnée $x^4 = t$). Finalement, toute matrice $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ s'écrit de manière univoque sous la forme

$$\Lambda = \Lambda(n) R(n, \Lambda)$$

Exercice 8.4

Soient $\Lambda(n_1)$ et $\Lambda(n_2)$ deux transformations de Lorentz pures appliquant le quadrivecteur $n_0 = (0, 0, 0, 1)$ sur les quadrivecteurs n_1 et n_2 respectivement. Montrer que la composition de ces transformations de Lorentz pures est de la forme $\Lambda(n_2) \Lambda(n_1) = \Lambda(n) R$ où $n = \Lambda(n_2) \Lambda(n_1) n_0 = \Lambda(n_2) n_1$ et où R désigne une rotation. Dans quels cas est-ce que R est l'identité ?

Solution :

La composition des transformations de Lorentz pures $\Lambda(n_1)$ et $\Lambda(n_2)$ est une transformation de Lorentz orthochrone propre. Dans ces conditions il existe une transformation de Lorentz pure $\Lambda(n)$ qui applique le quadrivecteur n_0 sur le quadrivecteur $n = \Lambda(n_2) \Lambda(n_1) n_0$ et il suit du résultat de l'exercice 8.3 qu'il existe une rotation univoquement définie $R(n, \Lambda(n_2) \Lambda(n_1))$ telle que

$$\Lambda(n_2) \Lambda(n_1) = \Lambda(n) R(n, \Lambda)$$

La rotation $R(n, \Lambda)$ se ramène à l'identité lorsque $\Lambda(n) = \Lambda(n_2) \Lambda(n_1)$. La vitesse \mathbf{v}_1 associée à la transformation de Lorentz pure $\Lambda(n_1)$ vaut

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{\mathbf{n}_1}{n_1^4} \quad \text{où} \quad \gamma(\mathbf{v}_1) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}_1)^2/c^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{(\mathbf{n}_1)^2 + c^2} = n_1^4$$

et il suit de la loi de transformation (8.54) que

$$\Lambda(n) x = \left(\mathbf{x}_{\perp \mathbf{n}} + n^4 \mathbf{x}_{\parallel \mathbf{n}} + \mathbf{n} x^4, n^4 x^4 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c^2} \right)$$

$$\text{où} \quad \mathbf{x}_{\perp \mathbf{n}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel \mathbf{n}} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{\parallel \mathbf{n}} = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{n}}{n^2}$$

etc., de même pour $\Lambda(n_1)$ et $\Lambda(n_2)$ en remplaçant dans l'expression qui précède n par n_1 et n_2 respectivement.

Pour déterminer les condition dans lesquelles

$$\Lambda(n) = \Lambda(n_2) \Lambda(n_1)$$

donnons-nous un quadrivecteur de la forme $x = (\mathbf{x}, 0)$ où \mathbf{x} désigne un vecteur non-nul orthogonal au vecteur \mathbf{n}_1 . Par conséquent

$$\Lambda(n_1) x = x \quad \text{d'où} \quad \Lambda(n) x = \Lambda(n_2) \Lambda(n_1) x = \Lambda(n_2) x$$

Or

$$\Lambda(n_2) x = \left(\mathbf{x}_{\perp \mathbf{n}_2} + n_2^4 \mathbf{x}_{\parallel \mathbf{n}_2}, \frac{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}}{c^2} \right)$$

$$\text{où} \quad \mathbf{x}_{\perp \mathbf{n}_2} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel \mathbf{n}_2} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{\parallel \mathbf{n}_2} = \frac{(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}) \mathbf{n}_2}{n_2^2}$$

Similairement

$$\Lambda(n) x = \left(\mathbf{x}_{\perp n} + n^4 \mathbf{x}_{\parallel n}, \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c^2} \right)$$

De l'égalité $\Lambda(n) x = \Lambda(n_2) x$ il découle donc que

$$\mathbf{x}_{\perp n} + n^4 \mathbf{x}_{\parallel n} = \mathbf{x}_{\perp n_2} + n_2^4 \mathbf{x}_{\parallel n_2} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \perp \mathbf{n}_1$$

On constate ainsi que

$$(n^4 - 1) \mathbf{x}_{\parallel n} = (n_2^4 - 1) \mathbf{x}_{\parallel n_2} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} \perp \mathbf{n} - \mathbf{n}_2, \quad \forall \mathbf{x} \perp \mathbf{n}_1$$

Par conséquent, de la première équation on déduit que si $\mathbf{x}_{\parallel n} \neq \mathbf{0}$ alors $\mathbf{x}_{\parallel n_2} \neq \mathbf{0}$ et par conséquent les vecteurs \mathbf{n} et \mathbf{n}_2 sont linéairement dépendants. En outre, si au contraire $\mathbf{x}_{\parallel n} = \mathbf{0}$ alors $\mathbf{x}_{\parallel n_2} = \mathbf{0}$ alors les vecteurs \mathbf{n} et \mathbf{n}_2 sont orthogonaux à tout vecteur orthogonal au vecteur \mathbf{n}_1 . Les vecteurs \mathbf{n} et \mathbf{n}_2 sont alors linéairement dépendants du vecteur \mathbf{n}_1 . Il suit en outre de la dernière équation qui précède que

$$\mathbf{n} - \mathbf{n}_2 = \lambda \mathbf{n}_1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Finalement la conclusion est que les vecteurs \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 et \mathbf{n} sont nécessairement co-linéaires. Par conséquent $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$ et

$$\begin{aligned} n = \Lambda(n_2) n_1 &= \left((\mathbf{n}_1)_{\perp n_2} + n_2^4 (\mathbf{n}_1)_{\parallel n_2} + n_1^4 \mathbf{n}_2, n_1^4 n_2^4 + \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{c^2} \right) \\ &= \left(n_2^4 \mathbf{n}_1 + n_1^4 \mathbf{n}_2, n_1^4 n_2^4 + \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

En conclusion la condition $R(n, \Lambda) = \mathbb{1}$ est satisfaite si et seulement si les vecteurs \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 sont linéairement dépendants et si

$$\mathbf{n} = n_2^4 \mathbf{n}_1 + n_1^4 \mathbf{n}_2 \quad \text{et} \quad n^4 = n_1^4 n_2^4 + \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{c^2}$$

Exercice 8.5.★

On considère une onde électromagnétique plane de vecteur d'onde \mathbf{k} et de pulsation $\omega = c \|\mathbf{k}\|$. Quelles sont les transformations de Lorentz Λ pour lesquelles $\Lambda k = k$ autrement dit pour lesquelles le quadrivecteur $k = (\mathbf{k}, k^4 = \|\mathbf{k}\|/c = \omega/c^2)$ est laissé inchangé.

Comment la polarisation de l'onde se comporte-t-elle sous l'action de telles transformations de Lorentz. Discuter le cas de la polarisation circulaire et le cas de la polarisation linéaire.

Remarque : Traduit dans le langage usuel le problème ci-dessus revient à poser la question : quels sont les changements de référentiel pour lesquels l'orientation et la couleur d'un faisceau lumineux restent inchangées ?

Solution :

On ne restreint pas la généralité si l'on suppose que $k = (0, 0, k^3, k^4 = k^3/c)$ avec $k^3 > 0$. Il s'agit donc de déterminer les transformations de Lorentz (orthochrones propres) pour lesquelles

$$\begin{aligned}\Lambda^1_3 k^3 + \Lambda^1_4 k^4 &= 0 \\ \Lambda^2_3 k^3 + \Lambda^2_4 k^4 &= 0 \\ \Lambda^3_3 k^3 + \Lambda^3_4 k^4 &= k^3 \\ \Lambda^4_3 k^3 + \Lambda^4_4 k^4 &= k^4\end{aligned}$$

Considérons d'abord la transformation de Lorentz infinitésimale (I.6) la plus générale qui satisfait aux conditions qui précèdent, autrement dit qui est telle que

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' = \mathbf{k} - \delta\tilde{\omega} \wedge \mathbf{k} - \delta\mathbf{v} k^4 \quad \text{et} \quad k^4 = k'^4 = k^4 - \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}/c^2$$

Les transformations de Lorentz infinitésimales qui laissent le quadrivecteur k inchangé sont donc telles que

$$\delta\tilde{\omega} \wedge \mathbf{k} + \delta\mathbf{v} k^4 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$$

autrement elles sont telles que

$$\delta\tilde{\omega} = \delta\alpha \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \wedge \delta\mathbf{v}}{c} \quad \text{et} \quad \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{v} = 0 \quad \text{où} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|}$$

Dans cette expression $\delta\alpha$ est arbitraire et correspond à l'angle de rotation d'une rotation infinitésimale dont l'axe est parallèle à la direction fournie par le vecteur \mathbf{k} . Cette rotation joue un rôle trivial et peut être écartée de la discussion. Dans ces conditions, puisque $\mathbf{k} = \|\mathbf{k}\| \mathbf{e}_3$, il vient

$$\delta\mathbf{v} = (\delta v^1, \delta v^2, 0) \quad \text{et} \quad \delta\tilde{\omega} = \left(\frac{\delta v^2}{c}, -\frac{\delta v^1}{c}, 0 \right)$$

Par conséquent, si l'on se réfère à l'annexe I, et plus précisément aux résultats et définitions (I.6) à (I.10), on constate que la transformation de Lorentz infinitésimale la plus générale qui laisse le quadrivecteur k inchangé s'écrit

$$\begin{aligned}\Lambda(\delta v^1, \delta v^2) &= \mathbb{1} + \frac{\delta v^2}{c} \check{L}_1 - \frac{\delta v^1}{c} \check{L}_2 + \delta v^1 K_1 + \delta v^2 K_2 \\ &= \mathbb{1} + \frac{\delta v^1}{c} G_1 + \frac{\delta v^2}{c} G_2\end{aligned}$$

où les symboles G_1 et G_2 désignent les matrices

$$G_1 = c K_1 - \check{L}2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$G_2 = c K_2 + \check{L}1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/c & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par un calcul direct on peut vérifier que ces dernières matrices présentent les propriétés que voici

$$G_1 G_2 = G_2 G_1 = 0 \quad \text{et} \quad (G_1)^2 = (G_2)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & -1/c & 1 \end{bmatrix}.$$

De plus, comme il est aisé de la vérifier,

$$(G_1)^n = (G_2)^n = 0 \quad , \forall n \text{ entier } \geq 3$$

Des résultats qui précèdent, vu (I.13), on peut immédiatement déduire que les transformations de Lorentz orthochrones propres qui laissent le quadrivecteur k inchangé sont de la forme

$$\begin{aligned} \Lambda(k, \phi, a^1, a^2) &= R(\phi \check{e}_3) \exp(a^1 G_1 + a^2 G_2) \\ &= R(\phi \check{e}_3) \exp(a^1 G_1) \exp(a^2 G_2) \quad , \forall a^1 \text{ et } a^2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

puisque les matrices G_1 et G_2 commutent.

Pour la suite nous pouvons donc limiter la discussion à la situation dans laquelle $\phi = 0$ et $a^2 = 0$. Examinons la structure des matrices $\Lambda(k, 0, a^1, 0) = \exp(a^1 G_1)$. Il suffit en effet de discuter cette dernière situation pour disposer de toutes les informations souhaitées. Pour alléger l'écriture remplaçons le paramètre a^1 par a . Constatons d'abord que

$$\exp(a G_1) = \mathbb{1} + a G_1 + \frac{a^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & -c a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 1 - a^2/2 & c a^2/2 \\ -a/c & 0 & -a^2/2c & 1 + a^2/2 \end{bmatrix}.$$

Or, une transformation de Lorentz orthochrone propre peut s'écrire de manière univoque sous la forme d'une rotation $R(\check{\omega})$ suivie d'une transformation de Lorentz pure $\Lambda(\mathbf{v})$. Formellement

$$\Lambda(k, 0, a, 0) = \exp(a G_1) = \Lambda(\mathbf{v}) R(\check{\omega})$$

Puisque, pour le quadrivecteur $n_0 = (0, 0, 0, 1)$, on a

$$n = (n^1, n^2, n^3, n^4) = \exp(a G_1) n_0 = \Lambda(\mathbf{v}) n_0 = (-c a, 0, c a^2/2, 1 + a^2/2)$$

alors la vitesse \mathbf{v} prend nécessairement la valeur

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = -\frac{\mathbf{n}}{c n^4} = \left(\frac{a}{1 + a^2/2}, 0, -\frac{a^2/2}{1 + a^2/2} \right)$$

Il n'est pas difficile de constater que la forme explicite de la matrice de transformation de Lorentz pure $\Lambda(\mathbf{v})$ s'écrit

$$\Lambda(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{v^1 v^1}{v^2} & 0 & -\frac{v^1 v^3}{v^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v^3 v^1}{v^2} & 0 & 1 - \frac{v^3 v^3}{v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma(\mathbf{v}) \begin{bmatrix} \frac{v^1 v^1}{v^2} & 0 & \frac{v^1 v^3}{v^2} & -v^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v^3 v^1}{v^2} & 0 & \frac{v^3 v^3}{v^2} & -v^3 \\ -\frac{v^1}{c^2} & 0 & -\frac{v^3}{c^2} & 1 \end{bmatrix}$$

où

$$\frac{v^1}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{a}{|a|\sqrt{1 + a^2/4}}, \quad \frac{v^2}{\|\mathbf{v}\|} = -\frac{a^2/2}{|a|\sqrt{1 + a^2/4}} \quad \text{et} \quad \gamma(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} = 1 + a^2/2$$

On constate ensuite que la matrice $\Lambda(\mathbf{v})^{-1}$ exprimée en fonction du paramètre a s'écrit

$$\Lambda(\mathbf{v})^{-1} = \Lambda(-\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{a^2/2}{1 + a^2/4} & 0 & -\frac{a^3/4}{1 + a^2/4} & c a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a^3/4}{1 + a^2/4} & 0 & 1 + \frac{a^4/8}{1 + a^2/4} & -c a^2/2 \\ a/c & 0 & -a^2/2c & 1 + a^2/2 \end{bmatrix}$$

Par conséquent

$$R(\check{\omega}) = \Lambda(\mathbf{v})^{-1} \exp(a G_1) = \Lambda(-\mathbf{v}) \exp(a G_1) = \begin{bmatrix} \frac{1 - a^2/4}{1 + a^2/4} & 0 & \frac{a}{1 + a^2/4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{1 + a^2/4} & 0 & \frac{1 - a^2/4}{1 + a^2/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice $R(\check{\omega})$ est donc une matrice qui décrit une rotation d'angle θ autour de l'axe Ox^2 . Plus précisément

$$\check{\omega} = \theta \check{e}_2 \quad \text{où} \quad \cos \theta = \frac{1 - a^2/4}{1 + a^2/4} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{a}{1 + a^2/4}$$

Par conséquent

$$\tan(\theta/2) = \frac{a}{2} \quad \text{ou encore} \quad \theta = 2 \operatorname{arctan} a/2$$

Pour la suite il convient d'exprimer les grandeurs suivantes en fonction de l'angle de rotation θ . On a

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{v}) &= \frac{3 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \\ \gamma(\mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}}{c} &= \left(2 \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}, 0, -2 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right) \end{aligned}$$

Notons encore que

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\cos(\theta/2), 0, -\sin(\theta/2) \right)$$

Pour terminer, déterminons le champ d'induction et le champ électrique vu du référentiel associé à la transformation de Lorentz $\Lambda(k, 0, a, 0) = \exp a G_1$. Puisque le vecteur d'onde de l'onde plane est de la forme $k = (0, 0, k^3, k^3/c)$, le champ d'induction de cette onde plane est nécessairement de la forme $\check{\mathbf{B}} = (\check{B}^1, \check{B}^2, 0)$, en vertu de la condition de transversalité. Ainsi

$$\check{\mathbf{B}}' \equiv R(\theta \check{e}_2) \check{\mathbf{B}} = (\check{B}_1 \cos \theta, \check{B}_2, -\check{B}_1 \sin \theta)$$

On constate donc que

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \check{\mathbf{B}}' = \check{B}^1 \cos(\theta/2)$$

et par conséquent (voir la section 8.6)

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{B}}'_{\parallel} &= \check{B}^1 \cos(\theta/2) \left(\cos(\theta/2), 0, -\sin(\theta/2) \right) \\ &= \check{B}^1 \left(\frac{1 + \cos \theta}{2}, 0, \frac{-\sin \theta}{2} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{v}) \check{\mathbf{B}}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{v}) (\check{\mathbf{B}}' - \check{\mathbf{B}}'_{\parallel}) \\ &= \frac{3 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \left(-\check{B}^1 \frac{1 - \cos \theta}{2}, \check{B}^2, -\check{B}^1 \frac{\sin \theta}{2} \right) \end{aligned}$$

Posons $\mathbf{E}' \equiv R(\theta \check{e}_2) \mathbf{E}$ et $\mathbf{k}' \equiv R(\theta \check{e}_2) \mathbf{k}$ Puisque pour une onde plane

$$\mathbf{E}'/c = -\frac{\mathbf{k}' \wedge \check{\mathbf{B}}'}{\|\mathbf{k}'\|} = (\cos \theta \check{B}^2, -\check{B}^1, -\sin \theta \check{B}^2) \quad \text{où} \quad \frac{\mathbf{k}'}{\|\mathbf{k}'\|} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

il vient

$$\gamma(\mathbf{v}) \frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}'}{c^2} = \left(-2 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \check{B}^1, 2 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \check{B}^2, -2 \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \check{B}^1 \right)$$

Finalement, selon la loi de transformation (8.56), les composantes du champ d'induction dans le nouveau référentiel s'écrivent

$$\begin{aligned} \check{B}'' &= \check{B}_{\parallel} + \gamma(\mathbf{v}) \left(\check{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}}{c^2} \right) \\ &= (\check{B}^1, \check{B}^2, 0) \end{aligned}$$

Quant au champ électrique

$$\mathbf{E}'' = -c \frac{\mathbf{k} \wedge \check{B}''}{\|\mathbf{k}\|} = -c \frac{\mathbf{k} \wedge \check{B}}{\|\mathbf{k}\|} = \mathbf{E}$$

Ces derniers résultats nous montrent que la polarisation de l'onde plane initiale vue du nouveau référentiel où, rappelons-le, le vecteur d'onde de l'onde est resté inchangé, est laissée inchangée.

Exercice 8.6

Vérifier que les équations (8.11) et (8.12) sont bien les expressions des équations de Maxwell-Hertz homogènes et inhomogènes respectivement.

Solution :

Les équation (8.11) sont non-triviales si et seulement si les indices μ , ν et ρ sont tous différents. Considérons donc les quatre cas suivants. Tout d'abord $\mu = 1$, $\nu = 2$, $\rho = 3$. Dans ces conditions l'équation (8.11) correspondante s'écrit

$$\partial_1 F_{23}(x) + \partial_2 F_{31}(x) + \partial_3 F_{12}(x) = 0$$

Autrement dit compte tenu des relations (8.4)

$$\partial_1 \check{B}^1(\mathbf{x}, t) + \partial_2 \check{B}^2(\mathbf{x}, t) + \partial_3 \check{B}^3(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{d'où} \quad \text{div } \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = 0$$

Tout d'abord $\mu = 1$, $\nu = 2$, $\rho = 4$. Dans ces conditions l'équation (8.11) correspondante s'écrit

$$\partial_1 F_{24}(x) + \partial_2 F_{41}(x) + \partial_4 F_{12}(x) = 0$$

Compte tenu des relations (8.4)

$$\begin{aligned} \partial_1 E_2(\mathbf{x}, t) - \partial_2 E_1(\mathbf{x}, t) + \partial_4 \check{B}^3(\mathbf{x}, t) &= 0 \\ \text{autrement dit} \quad (\mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^3 + \frac{\partial \check{B}^3(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

La démarche est similaire lorsque $\mu = 2, \nu = 3, \rho = 4$ et lorsque $\mu = 3, \nu = 1, \rho = 4$.

Considérons enfin les équations (8.12). Considérons tout d'abord le cas $\nu = 4$. Dans ces conditions l'équation (8.12) correspondante s'écrit

$$\partial_1 H^{14}(x) + \partial_2 H^{24}(x) + \partial_3 H^{34}(x) = -j^4(x)$$

Compte tenu des relations (8.2) et (8.7) cette dernière équation peut donc aussi s'écrire

$$\begin{aligned} -\partial_1 D^1(\mathbf{x}, t) + \partial_2 D^2(\mathbf{x}, t) + \partial_3 D^3(\mathbf{x}, t) &= -q(\mathbf{x}, t) \\ \text{autrement dit} \quad \text{div } \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= q(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

Enchaînons par le cas où $\nu = 1$. Dans ce cas

$$\partial_2 H^{21}(x) + \partial_3 H^{31}(x) + \partial_4 H^{41}(x) = -j^1(x)$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} -\partial_2 H_3(\mathbf{x}, t) + \partial_3 H_2(\mathbf{x}, t) + \partial_4 D^1(\mathbf{x}, t) &= -j^1(x) \\ \text{d'où} \quad (\text{rot } \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t))^1 - \frac{\partial D^1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= j^1(x, t) \end{aligned}$$

La démarche est similaire lorsque $\nu = 2$ et lorsque $\nu = 3$.

Exercice 8.7

On considère les grandeurs $T^\mu_\nu(x)$, $\mu, \nu = 1, \dots, 4$ définies par l'expression

$$T^\mu_\nu(x) = H^{\mu\rho}(x) F_{\nu\rho}(x) - \delta^\mu_\nu \frac{1}{4} H^{\lambda\rho}(x) F_{\lambda\rho}(x)$$

Ces grandeurs sont les composantes d'un tenseur appelé *tenseur énergie-quantité de mouvement* du champ électromagnétique.

1. Déterminer la forme explicite des composantes de ce tenseur pour le champ électromagnétique dans le vide. Montrer que :

$$T_4^4(x) = -\frac{1}{2}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) + \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) \cdot \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)) = -u_{em}(\mathbf{x}, t)$$

(Opposé de la densité d'énergie.)

$$T_k^4(x) = (\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \wedge \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t))_k = T_k(\mathbf{x}, t)$$

(Densité de la k -ième composante de quantité de mouvement.)

$$T_4^i(x) = -(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \wedge \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t))^i = -S^i(\mathbf{x}, t)$$

(Opposé de la i -ième composante de la densité de courant d'énergie.)

$$T_k^i(x) = \delta_k^i u_{em}(\mathbf{x}, t) - D^i(\mathbf{x}, t) E_k(\mathbf{x}, t) - \check{B}^i(\mathbf{x}, t) \check{H}_k(\mathbf{x}, t) = \tau_k^i(\mathbf{x}, t)$$

(i -ième composante de la densité de courant de la k -ième composante de quantité de mouvement.)

2. Constater la propriété de la trace du tenseur énergie-quantité de mouvement qui veut que celle-ci soit nulle.

$$T^\mu_\mu(x) = T_4^4(x) + T_k^k(x) = 0$$

3. Etablir et interpréter les équations suivantes

$$\partial_\mu T^\mu_\nu(x) = -F_{\nu\mu}(x) j^\mu(x)$$

Solution :

Commençons par remarquer à partir des définitions (8.4) et (8.7) compte tenu des relations (8.46) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} H^{\lambda\rho}(x) F_{\lambda\rho}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left(\check{H}_k(\mathbf{x}, t) \check{B}^k(\mathbf{x}, t) - D^k(\mathbf{x}, t) E_k(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) \cdot \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right) \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} T_4^4(x) &= \left[H^{4\rho}(x) F_{4\rho}(x) - \frac{1}{4} H^{\lambda\rho}(x) F_{\lambda\rho}(x) \right] \\ &= H^{4k}(x) F_{4k}(x) - \frac{1}{2} \left(\check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) \cdot \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= -\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} \left(\check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) \cdot \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) \cdot \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right) = -u_{em}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1^4(x) &= H^{4\rho}(x) F_{1\rho}(x) = H^{42}(x) F_{12}(x) + H^{43}(x) F_{13}(x) \\
&= D^2(\mathbf{x}, t) \check{B}^3(\mathbf{x}, t) + D^3(\mathbf{x}, t) (-\check{B}^2(\mathbf{x}, t)) \\
&= (\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \wedge \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t))_1 = T_1(\mathbf{x}, t) \quad \text{etc, pour } k = 2, 3
\end{aligned}$$

En résumé

$$T_1^4(x) = (\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \wedge \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t))_k = T_k(\mathbf{x}, t) \quad , \quad \forall k = 1, 2, 3$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
T_4^1(x) &= H^{1\rho}(x) F_{4\rho}(x) = H^{12}(x) F_{42}(x) + H^{13}(x) F_{43}(x) \\
&= \check{H}_3(\mathbf{x}, t) (-E_2(\mathbf{x}, t)) + (-\check{H}_2(\mathbf{x}, t)) (-E_3(\mathbf{x}, t)) \\
&= -(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \wedge \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t))^1 \quad \text{etc, pour } 1 = 2, 3
\end{aligned}$$

En résumé

$$T_4^i(x) = -(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \wedge \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t))^i = -S^i(\mathbf{x}, t) \quad , \quad \forall i = 1, 2, 3$$

Ensuite, si $i \neq k$

$$\begin{aligned}
T_2^1(x) &= H^{1\rho}(x) F_{2\rho}(x) = H^{13}(x) F_{23}(x) + H^{14}(x) F_{24}(x) \\
&= -H_2(\mathbf{x}, t) \check{B}^1(\mathbf{x}, t) - D^1(\mathbf{x}, t) E_2(\mathbf{x}, t) \\
&\quad \text{etc, pour } i = 2, k = 3 \text{ et } i = 3, k = 1
\end{aligned}$$

Enfin, si $i=k$

$$\begin{aligned}
T_1^1(x) &= H^{1\rho}(x) F_{1\rho}(x) - \frac{1}{4} H^{\lambda\rho}(x) F_{\lambda\rho}(x) \\
&= H^{12}(x) F_{12}(x) + H^{13}(x) F_{13}(x) + H^{14}(x) F_{14}(x) - \frac{1}{4} H^{\lambda\rho}(x) F_{\lambda\rho}(x) \\
&= \frac{1}{2} (\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) \cdot \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)) - H^{13}(x) F_{13}(x) + H^{14}(x) F_{14}(x) \\
&= u_{em}(\mathbf{x}, t) - (-\check{H}_2(\mathbf{x}, t)) (-\check{B}^2(\mathbf{x}, t)) + (-D^1(\mathbf{x}, t)) E_1(\mathbf{x}, t) \\
&\quad \text{etc, pour } i = k = 2 \text{ et } i = k = 3
\end{aligned}$$

En résumé

$$T_k^i(x) = \delta_k^i u_{em}(\mathbf{x}, t) - D^i(\mathbf{x}, t) E_k(\mathbf{x}, t) - \check{B}^i(\mathbf{x}, t) \check{H}_k(\mathbf{x}, t) = \tau_k^i(\mathbf{x}, t)$$

La relation 2) est immédiate puisque

$$T_k^k(x) = 3 u_{em}(\mathbf{x}, t) - \check{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) \cdot \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = u_{em}(\mathbf{x}, t)$$

Etablissons l'équation 3). Partant de l'expression de $T^\mu_\nu(x)$ il vient

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^\mu_\nu(x) &= (\partial_\mu H^{\mu\rho}(x)) F_{\nu\rho}(x) + H^{\mu\rho}(x) (\partial_\mu F_{\nu\rho}(x)) - \frac{1}{4} \partial_\nu (H^{\lambda\rho}(x) F_{\lambda\rho}(x)) \\ &= -j^\rho(x) F_{\nu\rho}(x) + H^{\lambda\rho}(x) (\partial_\lambda F_{\nu\rho}(x)) - \frac{1}{2} H^{\lambda\rho}(x) (\partial_\nu F_{\lambda\rho}(x))\end{aligned}$$

La seconde égalité découle de (8.12) puis du remplacement de l'indice μ par λ dans le deuxième terme Utilisé (8.12) puis $\mu - \lambda$ dans second terme. Ensuite compte tenu de (8.36) dans dernier terme il vient

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^\mu_\nu(x) &= -j^\rho(x) F_{\nu\rho}(x) + \frac{1}{2} H^{\lambda\rho}(x) (\partial_\lambda F_{\nu\rho}(x) + \partial_\rho F_{\lambda\nu}(x) + \partial_\nu F_{\rho\lambda}(x)) \\ &= -j^\rho(x) F_{\nu\rho}(x)\end{aligned}$$

La première égalité résulte de l'antisymétrie (8.6) suivie de l'échange des indices λ et ρ puis de l'antisymétrie (8.3). La dernière égalité est alors une conséquence des équations (8.11). L'interprétation de ces équations sont celles du bilan d'énergie et du bilan de quantité de mouvement du champ électromagnétique. Lorsque $\nu = 4$ cette équation est équivalente à l'équation (5.22). En effet,

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^\mu_4(x) &= -div \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial u_{em}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ &= -j^\rho(x) F_{4\rho}(x) = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

Lorsque $\nu = 1, 2, 3$ ces équations sont équivalentes aux équations (5.26). En effet,

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^\mu_k(x) &= div \boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial T_k(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ &= -j^\rho(x) F_{k\rho}(x) = -(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \wedge \check{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t))_k - q(\mathbf{x}, t) E_k(\mathbf{x}, t) \\ &= -f_k(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

Exercice 8.8

On considère un milieu conducteur, isotrope et homogène, de conductivité σ . La constante diélectrique et la perméabilité magnétique de ce milieu sont celles du vide. Ce milieu est immobile par rapport à un référentiel privilégié \mathcal{R}_0 . Quelle est la formulation de la loi d'Ohm en référence à un autre référentiel d'inertie quelconque \mathcal{R} pour lequel le référentiel \mathcal{R}_0 , ou encore le milieu conducteur, apparaissent comme animés d'une vitesse de translation uniforme \mathbf{v} , bien sûr inférieure à la vitesse de la lumière? Quelle est la forme des équations qui gouvernent la propagation des ondes électromagnétiques, vues du référentiel \mathcal{R} ?

Solution :

$n_0 = (0, 0, 0, 1)$ attaché au référentiel \mathcal{R}_0 . Dans ce référentiel

$$\mathbf{j}_{\text{ohm}} = \sigma \mathbf{E}$$

ce que l'on peut écrire

$$j_{\text{ohm}}^\mu = \sigma g^{\mu\rho} F_{\rho\nu} n_0^\nu \quad \text{et} \quad (n_0)_\mu j_{\text{ohm}}^\mu = 0$$

Selon (8.24) et compte tenu de (8.39)

$$\begin{aligned} (j'_{\text{ohm}})^\mu &= \Lambda^\mu_\lambda (\sigma g^{\lambda\rho} F_{\rho\nu} n_0^\nu) \\ &= \sigma \Lambda^\mu_\lambda g^{\lambda\rho} [\Lambda^\tau_\rho (\Lambda^{-1})^\omega_\tau] F_{\omega\nu} [(\Lambda^{-1})^\nu_\sigma \Lambda^\sigma_\alpha] n_0^\alpha \\ &= \sigma [\Lambda^\mu_\lambda g^{\lambda\rho} \Lambda^\tau_\rho] [(\Lambda^{-1})^\omega_\tau F_{\omega\nu} (\Lambda^{-1})^\nu_\sigma] [\Lambda^\sigma_\alpha n_0^\alpha] \end{aligned}$$

Ensuite, compte tenu de (8.45) et (8.26) il vient

$$(j'_{\text{ohm}})^\mu = \sigma g^{\mu\tau} F'_{\tau\sigma} (n'_0)^\sigma$$

où l'on a posé

$$(n'_0)^\sigma = \Lambda^\sigma_\alpha n_0^\alpha$$

Or, la vitesse du référentiel \mathcal{R} relativement au référentiel \mathcal{R}_0 est

$$v^i = -\frac{\Lambda^i_4}{\Lambda^4_4} = -\frac{(n')^i}{(n')^4} \quad \text{donc} \quad \mathbf{v} = -\frac{\mathbf{n}'}{(n')^4}$$

et la vitesse \mathbf{v}'_0 du référentiel \mathcal{R}_0 relativement au référentiel \mathcal{R} , donc la vitesse du milieu conducteur relativement au référentiel \mathcal{R} , vaut

$$\mathbf{v}'_0 = \frac{\mathbf{n}'}{(n')^4} \quad \text{autrement dit} \quad (n')^4 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}'_0)^2/c^2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{v}'_0}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}'_0)^2/c^2}}$$

Ainsi, il suit de l'expression qui précède de $(j'_{\text{ohm}})^\mu$ que, compte tenu de (8.4),

$$\mathbf{j}'_{\text{ohm}} = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}'_0)^2/c^2}} (\mathbf{v}'_0 \wedge \check{\mathbf{B}}' + \mathbf{E}')$$

et

$$q' = (j'_{\text{ohm}})^4 = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}'_0)^2/c^2}} \frac{\mathbf{v}'_0 \cdot \mathbf{E}'}{c^2}$$

Posons

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}'_0)^2/c^2}} \frac{\mathbf{v}'_0 \cdot \mathbf{E}'}{c^2}$$

Les équations de Maxwell-Hertz en absence de distribution de charge et de courant extérieurs s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{D}' &= \sigma' \frac{\mathbf{v}'_0 \cdot \mathbf{E}'}{c^2} \quad , \quad \text{rot } \check{\mathbf{H}}' = \sigma' (\mathbf{v}'_0 \wedge \check{\mathbf{B}}' + \mathbf{E}') + \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'} \\ \text{et} \\ \text{rot } \mathbf{E}' &= -\frac{\partial \check{\mathbf{B}}'}{\partial t'} \quad , \quad \text{div } \check{\mathbf{B}}' = 0 \end{aligned}$$

Les équations d'onde prennent alors les formes que voici

$$\begin{aligned} \square \mathbf{E}' &= \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \left[\text{grad} \left(\frac{\mathbf{v}'_0 \cdot \mathbf{E}'}{c^2} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} - \mathbf{v}'_0 \wedge \text{rot } \mathbf{E}' \right) \right] \\ \text{et} \\ \square \check{\mathbf{B}}' &= -\sigma' \left[\text{rot} (\mathbf{v}'_0 \wedge \check{\mathbf{B}}') - \frac{\partial \check{\mathbf{B}}'}{\partial t'} \right] \end{aligned}$$

Exercice 8.9

Vérifier les lois de transformation (8.55), (8.56), (8.57) et (8.58)

Indications : Il suffit de procéder à cette vérification pour la situation où, par exemple, $\mathbf{v} = (0, 0, v)$.

Solution :

Ensuite utiliser la transformation de Lorentz pure associée à $\mathbf{v} = (0, 0, v)$

$$\Lambda(\mathbf{v})^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(v) & -\gamma(v)v \\ 0 & 0 & -\gamma(v)v/c^2 & \gamma(v) \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

et le fait que

$$(\Lambda(\mathbf{v})^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu(-v)$$

1. Vu (8.24) pour la quadridensité de courant et compte tenu de (8.2)

$$\begin{aligned} j'^1(\mathbf{x}', t') &= j^1(\mathbf{x}, t) \quad , \quad j'^2(\mathbf{x}', t') = j^2(\mathbf{x}, t) \\ j'^3(\mathbf{x}', t') &= \gamma(v)(j^3(\mathbf{x}, t) - v q(\mathbf{x}, t)) \\ \text{et} \quad q'(\mathbf{x}', t') &= \gamma(v)(q(\mathbf{x}, t) - v j^3(\mathbf{x}, t)/c^2) \end{aligned}$$

2. Vu (8.28) et (8.29) pour le champ électrique et le champ d'induction, compte tenu de (8.4)

$$\begin{aligned}
\check{B}'^1(\mathbf{x}', t') &= \gamma(v)(\check{B}^1(\mathbf{x}, t) + v E^2(\mathbf{x}, t)/c^2) \\
\check{B}'^2(\mathbf{x}', t') &= \gamma(v)(\check{B}^2(\mathbf{x}, t) - v E^1(\mathbf{x}, t)/c^2) \\
\check{B}'^3(\mathbf{x}', t') &= \check{B}^3(\mathbf{x}, t)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E'^1(\mathbf{x}', t') &= \gamma(v)(E^1(\mathbf{x}, t) - v \check{B}^2(\mathbf{x}, t)) \\
E'^2(\mathbf{x}', t') &= \gamma(v)(E^2(\mathbf{x}, t) + v \check{B}^1(\mathbf{x}, t)) \\
E'^3(\mathbf{x}', t') &= E^3(\mathbf{x}, t)
\end{aligned}$$

3. Vu (8.30) pour la quadridensité de force, compte tenu de (8.5)

$$\begin{aligned}
f'^1(\mathbf{x}', t') = f^1(\mathbf{x}, t) \quad , \quad f'^2(\mathbf{x}', t') = f^2(\mathbf{x}, t) \\
f'^3(\mathbf{x}', t') = \gamma(v)(f^3(\mathbf{x}, t) - v s(\mathbf{x}, t))
\end{aligned}$$

et

$$s'(\mathbf{x}', t') = \gamma(v)(s(\mathbf{x}, t) - v f^3(\mathbf{x}, t)/c^2)$$

4. Vu (8.26) pour le quadripotential, compte tenu de (8.8)

$$\begin{aligned}
A'^1(\mathbf{x}', t') = A^1(\mathbf{x}, t) \quad , \quad A'^2(\mathbf{x}', t') = A^2(\mathbf{x}, t) \\
A'^3(\mathbf{x}', t') = \gamma(v)(A^3(\mathbf{x}, t) - v \Phi(\mathbf{x}, t)/c^2)
\end{aligned}$$

et

$$\Phi'(\mathbf{x}', t') = \gamma(v)(\Phi(\mathbf{x}, t) - v A^3(\mathbf{x}, t))$$

Exercice 8.10★

Etudier l'évolution d'un porteur de charge électrique Q de masse m en présence d'un champ électromagnétique uniforme et indépendant du temps en négligeant l'influence du rayonnement émis par le porteur de charge.

Indication : Partir de l'équation relativiste (8.87). Discuter séparément le cas particulier où le champ électrique \mathbf{E} est orthogonal au champ d'induction $\check{\mathbf{B}}$.

Solution :

Lorsque l'influence du rayonnement peut être négligée l'évolution de la particule chargée est régie par l'équation (8.87) qui, rappelons-le, s'écrit

$$m g_{\mu\nu} \frac{d^2 r^\nu(\tau)}{d\tau^2} = Q F_{\mu\nu} \frac{dr^\nu(\tau)}{d\tau} \quad (1)$$

Pour résoudre cette équation une méthode appropriée consiste à faire usage, lorsqu'ils existent, des vecteurs propres "a priori" complexes solutions du système d'équations

$$F_{\mu\nu} X^\nu = \lambda g_{\mu\nu} X^\nu \quad \text{où } X^\mu \in \mathbb{C}, \forall \mu \quad (2)$$

Compte tenu de l'expression (8.4) des composantes du tenseur $F_{\mu\nu}$ en fonction des composantes du champ électrique et des composantes du champ d'induction, le déterminant caractéristique du système d'équations qui précède s'écrit,

$$\det \{F_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}\} = -c^2 \lambda^4 + (\mathbf{E}^2 - c^2 \check{\mathbf{B}}^2) \lambda^2 + (\mathbf{E} \cdot \check{\mathbf{B}})^2$$

Le système d'équations (2) possède au moins une solution non-triviale si et seulement si le déterminant caractéristique est nul, autrement dit si et seulement si,

$$\lambda^4 - (\mathbf{E}^2/c^2 - \check{\mathbf{B}}^2) \lambda^2 - (\mathbf{E} \cdot \check{\mathbf{B}}/c)^2 = 0 \quad (3)$$

Cette équation nous amène à distinguer deux situations selon que le produit scalaire $\mathbf{E} \cdot \check{\mathbf{B}}$ est non-nul ou égal à zéro. La situation la plus générale est, bien entendu, celle dans laquelle ce produit scalaire est non-nul et c'est elle que nous discuterons d'abord.

1) Si $\mathbf{E} \cdot \check{\mathbf{B}} \neq 0$ l'équation (3) possède deux solutions réelles non-nulles et opposées $\lambda = \pm \alpha$ et deux solutions imaginaires pures non-nulles et opposées $\lambda = \pm i \beta$. Il est aisé de constater que le signe des grandeurs réelles α et β peut être choisi de telle manière que ces grandeurs satisfont aux conditions qui suivent :

$$\alpha^2 - \beta^2 = \mathbf{E}^2/c^2 - \check{\mathbf{B}}^2, \quad \alpha\beta = \mathbf{E} \cdot \check{\mathbf{B}}/c \quad \text{et} \quad \alpha > 0 \quad (4)$$

Ces 4 solutions constituent 4 valeurs propres distinctes et par conséquent il existe 4 vecteurs propres linéairement indépendants associés à ces dernières valeurs propres. Notons $X_{(\ell)} \in \mathbb{C}^4, \ell = 1, 2, 3, 4$ ces vecteurs propres et notons respectivement $\lambda_{(\ell)}, \ell = 1, 2, 3, 4$ les valeurs propres qui leur sont associées. Dans ces conditions la solution générale de l'équation (1) peut s'écrire sous la forme

$$r^\nu(\tau) = \sum_{\ell=1}^4 f_{(\ell)}(\tau) X_{(\ell)}^\nu \quad (5)$$

où, les symboles $f_{(\ell)}(\tau)$ désignent des solutions des équations différentielles

$$\frac{d^2 f_{(\ell)}(\tau)}{d\tau^2} = \frac{Q}{m} \lambda_{(\ell)} \frac{df_{(\ell)}(\tau)}{d\tau}$$

Il est alors évident que les solutions générales de ces équations s'écrivent

$$f_{(\ell)}(\tau) = a_{(\ell)} \exp\left(\frac{Q}{m} \lambda_{(\ell)} \tau\right) + b_{(\ell)}, \quad \ell = 1, 2, 3, 4. \quad (6)$$

Les symboles $a_{(\ell)}$ et $b_{(\ell)}$ désignent les constantes d'intégration. Mais, puisque le champ électromagnétique est uniforme et constant dans le temps, les valeurs des constantes $b_{(1)}, b_{(2)}$ et $b_{(3)}$ ne jouent pas de rôle significatif. **Elles seront dorénavant supposées nulles.**

Pour déterminer la forme explicite des vecteurs propres $X_{(\ell)}$, $\ell = 1, 2, 3, 4$, commençons par remarquer que le système d'équations (2) peut aussi s'écrire

$$\mathbf{X} \wedge \check{\mathbf{B}} + X^4 \mathbf{E} = \lambda \mathbf{X} \quad \text{et} \quad \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{E}}{c^2} = \lambda X^4 \quad (7)$$

Supposons, pour l'instant, que les vecteurs \mathbf{E} et $\check{\mathbf{B}}$ sont *linéairement indépendants*. Dans ces conditions on peut écrire

$$\mathbf{X} = u \mathbf{E} + v \check{\mathbf{B}} + w \mathbf{E} \wedge \check{\mathbf{B}}$$

Compte tenu de l'équation (3), il découle du système d'équations (7) que

$$u = \lambda \frac{X^4}{\lambda^2 + \check{\mathbf{B}}^2}, \quad v = \frac{\mathbf{E} \cdot \check{\mathbf{B}}}{\lambda} \frac{X^4}{\lambda^2 + \check{\mathbf{B}}^2} \quad \text{et} \quad w = \frac{X^4}{\lambda^2 + \check{\mathbf{B}}^2}$$

On peut par conséquent imposer la valeur de X^4 . Le choix fait est le suivant

$$\mathbf{X} = \frac{1}{c \lambda} \frac{\lambda^2 \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \check{\mathbf{B}}) \check{\mathbf{B}} + \lambda \mathbf{E} \wedge \check{\mathbf{B}}}{\lambda^2 + \check{\mathbf{B}}^2} \quad \text{et} \quad X^4 = \frac{1}{c} \quad (8)$$

Pour la suite convenons de l'indexation suivante des valeurs propres λ attachées au système d'équations (2)

$$\lambda_{(1)} = \alpha, \quad \lambda_{(2)} = -\alpha, \quad \lambda_{(3)} = i \beta \quad \text{et} \quad \lambda_{(4)} = -i \beta \quad (9)$$

Pour la suite il convient de déterminer la valeur des expressions de la forme $X_{(\ell)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(\ell')}^\nu$. Dans ce but remarquons d'abord qu'il découle du système d'équations (2) que pour tout couple de valeurs propres $\lambda_{(\ell)}$ et $\lambda_{(\ell')}$, distincts ou non, on a

$$(\lambda_{(\ell)} + \lambda_{(\ell')}) X_{(\ell)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(\ell')}^\nu = X_{(\ell')}^\mu F_{\mu\nu} X_{(\ell)}^\nu + X_{(\ell)}^\mu F_{\mu\nu} X_{(\ell')}^\nu = 0$$

Par conséquent

$$X_{(\ell)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(\ell')}^\nu = 0 \quad \text{dès que} \quad \lambda_{(\ell)} + \lambda_{(\ell')} \neq 0 \quad (10)$$

L'expression $X_{(\ell)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(\ell')}^\nu$ est donc susceptible d'être non-nulle dès que $\lambda_{(\ell)} + \lambda_{(\ell')} = 0$, c'est-à-dire seulement si $\ell = 1$ et $\ell' = 2$ ou l'inverse ou si $\ell = 3$ et $\ell' = 4$ ou l'inverse. Comme nous allons le constater, les expressions

$$X_{(1)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(2)}^\nu \equiv G_{12} \quad \text{et} \quad X_{(3)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(4)}^\nu \equiv G_{34}$$

sont réelles et respectivement négative et positive. En effet, partant des expressions (8) et compte tenu des relations (4) on a,

$$X_{(1)} - X_{(2)} = \left[\frac{2}{c} \frac{\alpha \mathbf{E} + \beta c \check{\mathbf{B}}}{\alpha^2 + \check{\mathbf{B}}^2}, 0 \right]$$

et

$$X_{(3)} - X_{(4)} = \left[\frac{2}{i c} \frac{\beta \mathbf{E} - \alpha c \check{\mathbf{B}}}{\beta^2 - \check{\mathbf{B}}^2}, 0 \right]$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} G_{12} &= X_{(1)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(2)}^\nu = - \frac{(X_{(1)}^\mu - X_{(2)}^\mu) g_{\mu\nu} (X_{(1)}^\nu - X_{(2)}^\nu)}{2} \\ &= - \frac{2}{c^2} \left[\frac{\alpha \mathbf{E} + \beta c \check{\mathbf{B}}}{\alpha^2 + \check{\mathbf{B}}^2} \right]^2 < 0 \\ \text{et} \\ G_{34} &= X_{(3)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(4)}^\nu = - \frac{(X_{(3)}^\mu - X_{(4)}^\mu) g_{\mu\nu} (X_{(3)}^\nu - X_{(4)}^\nu)}{2} \\ &= \frac{2}{c^2} \left[\frac{\beta \mathbf{E} - \alpha c \check{\mathbf{B}}}{\beta^2 - \check{\mathbf{B}}^2} \right]^2 > 0 \end{aligned}$$

Finalement, après réduction et compte tenu des relations (4), ces grandeurs peuvent s'écrire

$$G_{12} = -2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \check{\mathbf{B}}^2} < 0 \quad \text{et} \quad G_{34} = -2 \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\beta^2 - \check{\mathbf{B}}^2} > 0 \quad (11)$$

Revenons maintenant à l'expression (5). Le quadrivecteur $r(\tau)$ doit être réel quel que soit la valeur du temps propre τ . Selon (8) et (9) les quadrivecteurs $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$ sont réels et les quadrivecteurs $X_{(3)}^\mu$ et $X_{(4)}^\mu$ sont complexes conjugués. Il est donc nécessaire et suffisant que dans l'expression (5), les fonctions $f_{(1)}(\tau)$ et $f_{(2)}(\tau)$ soient réelles et que les fonctions $f_{(3)}(\tau)$ et $f_{(4)}(\tau)$ soient complexes conjuguées quel que soit τ . En outre, pour que la condition 8.91 soit satisfaite, il faut que

$$\begin{aligned} \frac{dr^\mu(\tau)}{d\tau} g_{\mu\nu} \frac{dr^\nu(\tau)}{d\tau} &= \sum_{\ell=1}^4 \sum_{\ell'=1}^4 \frac{df_{(\ell)}(\tau)}{d\tau} \frac{df_{(\ell')}(\tau)}{d\tau} X_{(\ell)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(\ell')}^\nu \\ &= 2 \left[\frac{df_{(1)}(\tau)}{d\tau} \frac{df_{(2)}(\tau)}{d\tau} G_{12} + \frac{df_{(3)}(\tau)}{d\tau} \frac{df_{(4)}(\tau)}{d\tau} G_{34} \right] = -c^2 \end{aligned}$$

Or, vu la forme des solutions (6), présentement

$$\begin{aligned} f_{(1)}(\tau) &= a_{(1)} \exp(\tau/\tau_{(0)}) + b_{(1)} \quad , \quad f_{(2)}(\tau) = a_{(2)} \exp(-\tau/\tau_{(0)}) + b_{(2)} \\ \text{et} \quad f_{(3)}(\tau) &= f_{(4)}(\tau)^* = a_{(3)} \exp(i \omega_{(0)} \tau) + b_{(3)} \end{aligned}$$

où

$$\frac{1}{\tau_{(0)}} = \frac{Q}{m} \alpha \quad \text{et} \quad \omega_{(0)} = \frac{Q}{m} \beta$$

et où les constantes $a_{(1)}$, $a_{(2)}$ sont réelles. Compte tenu de ce qui précède la condition (12) prend alors la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{dr^\mu(\tau)}{d\tau} g_{\mu\nu} \frac{dr^\nu(\tau)}{d\tau} &= 2 \left[-\frac{a_{(1)} a_{(2)}}{(\tau_{(0)})^2} G_{12} + \omega_{(0)}^2 |a_{(3)}|^2 G_{34} \right] \\ &= 4 \left(\frac{Q}{m} \right)^2 \left[a_{(1)} a_{(2)} \alpha^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \check{\mathbf{B}}^2} - |a_{(3)}|^2 \beta^2 \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\beta^2 - \check{\mathbf{B}}^2} \right] = -c^2 \end{aligned}$$

Autrement dit, pour que la condition (8.91) soit satisfaite il faut et il suffit que

$$|a_{(3)}|^2 = \frac{\beta^2 - \check{\mathbf{B}}^2}{\beta^2} \left[a_{(1)} a_{(2)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \check{\mathbf{B}}^2} + \left(\frac{m c}{2 Q} \right)^2 \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \right] \geq 0 \quad (12)$$

Puisque $\beta^2 \leq \check{\mathbf{B}}^2$ cette condition nécessite donc que

$$a_{(1)} a_{(2)} \leq -\left(\frac{m c}{2 Q \alpha} \right)^2 \frac{\alpha^2 + \check{\mathbf{B}}^2}{\alpha^2 + \beta^2} \leq 0 \quad (13)$$

Groupons maintenant les résultats acquis. Puisque $X_i^4 = 1/c$, $i = 1, \dots, 4$, il vient

$$t(\tau) = r^4(\tau) = \frac{a_{(1)}}{c} \exp(\tau/\tau_0) + \frac{a_{(2)}}{c} \exp(-\tau/\tau_0) + 2 \frac{|a_3|}{c} \cos(\omega_{(0)}\tau + \delta) \quad (14)$$

Dans cette expression le symbole δ désigne l'argument du nombre complexe a_3 . Enfin pour que $dt(\tau)/d\tau \geq 1$ quel que soit le temps propre τ il faut et il suffit que $a^1 > 0$. Pour la position spatiale à l'instant τ , il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\tau) &= a_{(1)} \mathbf{X}_{(1)} \exp(\tau/\tau_0) + a_{(2)} \mathbf{X}_{(2)} \exp(-\tau/\tau_0) \\ &\quad + |a_3| \left(\mathbf{X}_{(3)} \exp(i(\omega_0\tau + \delta)) + \mathbf{X}_{(3)}^* \exp(-i(\omega_0\tau + \delta)) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Posons

$$a_{(0)} = \sqrt{-a_{(1)} a_{(2)}} \geq \frac{m c}{2 Q \alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2 + \check{\mathbf{B}}^2}{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \text{et} \quad \exp\left(\frac{\Delta\tau}{\tau_{(0)}}\right) = \sqrt{-\frac{a_{(1)}}{a_{(2)}}} \quad (16)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\tau) &= 2 a_{(0)} \left(\frac{\alpha \mathbf{E}/c + \beta \check{\mathbf{B}}}{\alpha^2 + \check{\mathbf{B}}^2} \cosh\left(\frac{\tau + \Delta\tau}{\tau_{(0)}}\right) + \frac{(\mathbf{E}/c) \wedge \check{\mathbf{B}}}{\alpha^2 + \check{\mathbf{B}}^2} \sinh\left(\frac{\tau + \Delta\tau}{\tau_{(0)}}\right) \right) \\ &\quad + 2 |a_3| \left(\frac{\beta \mathbf{E}/c - \alpha \check{\mathbf{B}}}{\beta^2 - \check{\mathbf{B}}^2} \sin(\omega_0\tau + \delta) - \frac{(\mathbf{E}/c) \wedge \check{\mathbf{B}}}{\beta^2 - \check{\mathbf{B}}^2} \cos(\omega_0\tau + \delta) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Le mouvement se compose donc d'un mouvement elliptique dans le plan engendré par les vecteurs $\beta \mathbf{E}/c - \alpha \check{\mathbf{B}}$ et $\mathbf{E} \wedge \check{\mathbf{B}}$ auquel se superpose un mouvement hyperbolique dans le plan engendré par les vecteurs $\alpha \mathbf{E}/c + \beta \check{\mathbf{B}}$ et $\mathbf{E} \wedge \check{\mathbf{B}}$. Pour ce qui concerne l'instant par rapport au référentiel d'inertie on a

$$t(\tau) = r^4(\tau) = 2 \frac{a(0)}{c} \sinh((\tau + \Delta\tau)/\tau_{(0)}) + 2 \frac{|a_3|}{c} \cos(\omega_{(0)}\tau + \delta) \quad (18)$$

On notera enfin que par un choix approprié de l'origine du temps propre τ on pourra annuler l'une ou l'autre des grandeurs δ ou $\Delta\tau$.

La situation que nous ayons écartée initialement, à savoir la situation dans laquelle les vecteurs \mathbf{E} et $\check{\mathbf{B}}$ sont *linéairement dépendants* peut être traitée par un passage à la limite des résultats qui précèdent.

2) Abordons maintenant la discussion de la situation particulière dans laquelle $\mathbf{E} \cdot \check{\mathbf{B}} = 0$. Supposons, pour l'instant, que ni le champ \mathbf{E} et ni le champ $\check{\mathbf{B}}$ s'annule et qu'en outre $\mathbf{E}^2 - c^2 \check{\mathbf{B}}^2 \neq 0$.

Sous ces conditions l'équation (3) fournit une solution $\lambda = 0$ doublement dégénérée et deux solutions non-nulles opposées, réelles ou imaginaires pures selon que $\|\mathbf{E}\| > c \|\check{\mathbf{B}}\|$ ou que $\|\mathbf{E}\| < c \|\check{\mathbf{B}}\|$ respectivement.

Considérons le premier cas où $\|\mathbf{E}\| > c \|\check{\mathbf{B}}\| > 0$. Les solutions non-nulles de l'équation (3) s'écrivent

$$\lambda_{(1)} = \alpha \quad \text{et} \quad \lambda_{(2)} = -\alpha \quad \text{où} \quad \alpha = \sqrt{\mathbf{E}^2/c^2 - \check{\mathbf{B}}^2} > 0 \quad (19)$$

Vu les hypothèses qui précèdent, les vecteurs \mathbf{E} et $\check{\mathbf{B}}$ sont linéairement indépendants. On peut ainsi déterminer les quadrivecteurs propres $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$ par une démarche identique à celle qui fut adoptée dans le cas général traité précédemment. L'expression (8) reste donc valable et nous pouvons écrire

$$\mathbf{X}_{(1)} = \frac{\alpha \mathbf{E}/c + (\mathbf{E}/c) \wedge \check{\mathbf{B}}}{\alpha^2 + \check{\mathbf{B}}^2} = \frac{\alpha \mathbf{E}/c + (\mathbf{E}/c) \wedge \check{\mathbf{B}}}{(\mathbf{E}/c)^2} \quad \text{et} \quad X_{(1)}^4 = \frac{1}{c}$$

et (20)

$$\mathbf{X}_{(2)} = \frac{-\alpha \mathbf{E}/c + (\mathbf{E}/c) \wedge \check{\mathbf{B}}}{\alpha^2 + \check{\mathbf{B}}^2} = \frac{-\alpha \mathbf{E}/c + (\mathbf{E}/c) \wedge \check{\mathbf{B}}}{(\mathbf{E}/c)^2} \quad \text{et} \quad X_{(2)}^4 = 1$$

Pour déterminer le (ou les) vecteur(s) propre(s) associé(s) à la valeur propre $\lambda = 0$ il convient de partir des équations (7) qui maintenant prennent la forme

$$\mathbf{X} \wedge \check{\mathbf{B}} + X^4 \mathbf{E} = 0 \quad \text{et} \quad -\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} = 0$$

Puisque les vecteurs \mathbf{E} et $\check{\mathbf{B}}$ sont non-nuls et orthogonaux on peut écrire

$$\mathbf{X} = u \mathbf{E} + v \check{\mathbf{B}} + w \mathbf{E} \wedge \check{\mathbf{B}}$$

et il découle directement du système d'équations qui précède que

$$u = 0 \quad , \quad v : \text{ est arbitraire } \quad \text{et} \quad w = \frac{X^4}{\check{\mathbf{B}}^2}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$ est de dimension 2. De plus, comme précédemment, on peut imposer la valeur de X^4 . Pour les quadrivecteurs propres $\mathbf{X}_{(3)}$ et $\mathbf{X}_{(4)}$ les choix faits sont les suivants

$$\mathbf{X}_{(3)} = \frac{i \alpha \check{\mathbf{B}} + (\mathbf{E}/c) \wedge \check{\mathbf{B}}}{\check{\mathbf{B}}^2} \quad \text{et} \quad X_{(3)}^4 = \frac{1}{c} \quad (21)$$

$$\mathbf{X}_{(4)} = \frac{-i \alpha \check{\mathbf{B}} + (\mathbf{E}/c) \wedge \check{\mathbf{B}}}{\check{\mathbf{B}}^2} \quad \text{et} \quad X_{(4)}^4 = \frac{1}{c}$$

Ces vecteurs $X_{(3)}$ et $X_{(4)}$ vérifient, en outre les relations

$$X_{(3)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(3)}^\nu = X_{(4)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(4)}^\nu = 0 \quad \text{et} \quad X_{(4)} = X_{(3)}^* \quad (22)$$

Les seules expressions de la forme $X_{(\ell)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(\ell')}^\nu$ susceptibles d'être non-nulles sont finalement celles pour lesquelles $\ell = 1$ et $\ell' = 2$ ou l'inverse et celles pour lesquelles $\ell = 3$ et $\ell' = 4$ ou l'inverse. Comme on le constate aisément par un calcul direct à partir des expressions (20) et (21) on a

$$G_{12} = X_{(1)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(2)}^\nu = \frac{-\alpha^2 (\mathbf{E}/c)^2 + (\mathbf{E}/c)^2 \check{\mathbf{B}}^2}{(\alpha^2 + \check{\mathbf{B}}^2)^2} - 1 = -2 \frac{c^2 \alpha^2}{\mathbf{E}^2} \quad (23)$$

$$G_{34} = X_{(3)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(4)}^\nu = 2 \frac{(\mathbf{E}/c)^2 - \check{\mathbf{B}}^2}{\check{\mathbf{B}}^2} = 2 \frac{\alpha^2}{\check{\mathbf{B}}^2}$$

Mais présentement, vu les équations qui gouvernent l'évolution des grandeurs $f_{(\lambda)}(\tau)$ nous pouvons écrire

$$f_{(1)}(\tau) = a_{(1)} \exp(\tau/\tau_{(0)}) \quad , \quad f_{(2)}(\tau) = a_{(2)} \exp(-\tau/\tau_{(0)}) \quad (24)$$

$$\text{et} \quad f_{(3)}(\tau) = f_{(4)}(\tau)^* = a_{(3)} \frac{\tau}{\tau_{(0)}}$$

où

$$\frac{1}{\tau_{(0)}} = \frac{Q \alpha}{m} \quad (25)$$

Les grandeurs $a_{(1)}$, $a_{(2)}$ et $a_{(3)}$ sont des constantes d'intégration. On relèvera encore que le quadrivecteur $r(\tau)$ étant à chaque instant réel il faut que les constantes $a_{(1)}$, $a_{(2)}$ soient réelles. Compte tenu de ce qui précède la condition (8.91) prend la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{dr^\mu(\tau)}{d\tau} g_{\mu\nu} \frac{dr^\nu(\tau)}{d\tau} &= 2 \left[-\frac{a_{(1)} a_{(2)}}{(\tau_0)^2} G_{12} + \frac{|a_{(3)}|^2}{(\tau_0)^2} G_{34} \right] \\ &= 4 \left(\frac{Q \alpha^2}{m} \right)^2 \left[\frac{c^2 a_{(1)} a_{(2)}}{\mathbf{E}^2} + \frac{|a_{(3)}|^2}{\check{\mathbf{B}}^2} \right] = -c^2 \end{aligned}$$

et par conséquent cette condition impose que

$$|a_{(3)}|^2 = -\frac{c^2 \check{\mathbf{B}}^2}{\mathbf{E}^2} \left[a_{(1)} a_{(2)} + \left(\frac{m c}{2 Q \alpha} \right)^2 \frac{\mathbf{E}^2}{c^2 \alpha^2} \right] \geq 0 \quad (26)$$

Il faut donc que le produit des coefficients $a_{(1)}$ et $a_{(2)}$ vérifie l'inégalité

$$a_{(1)} a_{(2)} \leq -\frac{m^2 c^2}{4 Q^2 \alpha^2} \frac{\mathbf{E}^2}{c^2 \alpha^2} \leq 0 \quad (27)$$

En assemblant les résultats obtenus il vient

$$t(\tau) = r^4(\tau) = \frac{a_{(1)}}{c} \exp(\tau/\tau_{(0)}) + \frac{a_{(2)}}{c} \exp(-\tau/\tau_{(0)}) + 2 \left| \frac{a_{(3)}}{c} \right| \cos \delta \frac{\tau}{\tau_{(0)}}$$

puisque $X_i^4 = 1/c$, $i = 1, \dots, 4$. Dans cette expression le symbole δ désigne l'argument du nombre complexe a_3 . Finalement pour que $dt(\tau)/d\tau \geq 1$ quel que soit le temps propre τ il faut et il suffit que $a_{(1)} > 0$. Pour la position dans l'espace, il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\tau) &= a_{(1)} \mathbf{X}_{(1)} \exp(\tau/\tau_{(0)}) + a_{(2)} \mathbf{X}_{(2)} \exp(-\tau/\tau_{(0)}) \\ &+ \left(a_3 \mathbf{X}_{(3)} + a_3^* \mathbf{X}_{(3)}^* \right) \frac{\tau}{\tau_{(0)}} \end{aligned}$$

Posons

$$a_{(0)} = \sqrt{-a_{(1)} a_{(2)}} \geq \frac{m c}{2 Q \alpha} \sqrt{\frac{\mathbf{E}^2}{c^2 \alpha^2}} \quad \text{et} \quad \exp\left(\frac{\Delta\tau}{\tau_0}\right) = \sqrt{\frac{a_{(1)}}{a_{(2)}}} \quad (28)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\tau) &= 2 a_{(0)} \left(\frac{\alpha c \mathbf{E}}{\mathbf{E}^2} \sinh\left(\frac{\tau + \Delta\tau}{\tau_{(0)}}\right) + \frac{c \mathbf{E} \wedge \check{\mathbf{B}}}{\mathbf{E}^2} \cosh\left(\frac{\tau + \Delta\tau}{\tau_{(0)}}\right) \right) \\ &+ 2 |a_3| \left(\frac{-\alpha \sin \delta \check{\mathbf{B}} + \cos \delta (\mathbf{E}/c) \wedge \check{\mathbf{B}}}{\check{\mathbf{B}}^2} \frac{\tau}{\tau_{(0)}} \right) \quad (29) \end{aligned}$$

Le mouvement est se compose donc de la superposition d'un mouvement hyperbolique dans le plan engendré par les vecteurs \mathbf{E} et $\mathbf{E} \wedge \check{\mathbf{B}}$ et d'un mouvement rectiligne dans le plan engendré par les vecteurs $\check{\mathbf{B}}$ et $\mathbf{E} \wedge \check{\mathbf{B}}$. Pour ce qui concerne le temps par rapport au référentiel d'inertie on a

$$t(\tau) = r^4(\tau) = 2 \frac{a(0)}{c} \sinh\left(\frac{\tau + \Delta\tau}{\tau(0)}\right) + 2 \frac{|a_3|}{c} \cos \delta \frac{\tau}{\tau(0)} \quad (30)$$

On notera enfin qu'un choix approprié de l'origine du temps propre τ on permet d'annuler l'une ou l'autre des grandeurs δ ou $\Delta\tau$.

Considérons maintenant à l'étude du deuxième cas où $\|\mathbf{E}\| < c \|\check{\mathbf{B}}\|$. L'équation (3) présente à nouveau une solution $\lambda = 0$ doublement dégénérée et deux solutions imaginaires pures non-nulles de valeurs opposées qui s'écrivent

$$\lambda_{(3)} = i \beta \quad \text{et} \quad \lambda_{(4)} = -i \beta \quad \text{où} \quad \beta = \sqrt{\check{\mathbf{B}}^2 - \mathbf{E}^2/c^2} \quad (31)$$

Pour déterminer le (ou les) vecteur(s) propre(s) associé(s) à la valeur propre $\lambda = 0$ partons à nouveau des équations (7) qui maintenant sont de la forme

$$\mathbf{X} \wedge \check{\mathbf{B}} + X^4 \mathbf{E} = 0 \quad \text{et} \quad -\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} = 0$$

Puisque les vecteurs \mathbf{E} et $\check{\mathbf{B}}$ sont non-nuls et orthogonaux on peut écrire

$$\mathbf{X} = u \mathbf{E} + v \check{\mathbf{B}} + w \mathbf{E} \wedge \check{\mathbf{B}}$$

et il découle directement du système d'équations qui précède que

$$u = 0 \quad , \quad v : \text{arbitraire} \quad \text{et} \quad w = \frac{X^4}{\check{\mathbf{B}}^2}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$ est de dimension 2. De plus, comme précédemment, on peut imposer la valeur de X^4 . Pour les quadrivecteurs propres $\mathbf{X}_{(1)}$ et $\mathbf{X}_{(2)}$ les choix faits sont les suivants

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\beta \check{\mathbf{B}} + (\mathbf{E}/c) \wedge \check{\mathbf{B}}}{\check{\mathbf{B}}^2} \quad \text{et} \quad X_{(1)}^4 = \frac{1}{c} \quad (32)$$

$$\mathbf{X}_2 = \frac{-\beta \check{\mathbf{B}} + (\mathbf{E}/c) \wedge \check{\mathbf{B}}}{\check{\mathbf{B}}^2} \quad \text{et} \quad X_{(2)}^4 = \frac{1}{c}$$

Ces vecteurs $\mathbf{X}_{(1)}$ et $\mathbf{X}_{(2)}$ sont ainsi réels et linéairement indépendants. Ces vecteurs $\mathbf{X}_{(1)}$ et $\mathbf{X}_{(2)}$ vérifient, en outre les relations

$$X_{(1)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(1)}^\nu = X_{(2)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(2)}^\nu = 0 \quad (33)$$

On peut déterminer les quadrivecteurs propres $\mathbf{X}_{(3)}$ et $\mathbf{X}_{(4)}$ par une démarche identique à celle qui fut adoptée dans le cas général traité précédemment. L'expression (8) reste donc valable et nous pouvons écrire

$$\mathbf{X}_{(3)} = \frac{i c \beta \mathbf{E} + \mathbf{E} \wedge (c \check{\mathbf{B}})}{\mathbf{E}^2} \quad \text{et} \quad X_{(3)}^4 = \frac{1}{c}$$

(34)

et

$$\mathbf{X}_{(4)} = \frac{-i c \beta \mathbf{E} + \mathbf{E} \wedge (c/\check{\mathbf{B}})}{(\mathbf{E}^2)} \quad \text{et} \quad X_{(4)}^4 = \frac{1}{c}$$

Ces vecteurs $X_{(3)}$ et $X_{(4)}$ sont donc complexes conjugués.

Les seules expressions de la forme $X_{(\ell)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(\ell')}^\nu$ susceptibles d'être non nulles sont finalement celles pour lesquelles $\ell = 1$ et $\ell' = 2$ ou l'inverse et celles pour lesquelles $\ell = 3$ et $\ell' = 4$ ou l'inverse. Comme on le constate aisément par un calcul direct à partir des expressions (32) et (34) on parvient aux deux expressions qui suivent,

$$G_{12} = X_{(1)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(2)}^\nu = \frac{-\beta^2 \check{\mathbf{B}}^2 + (\mathbf{E}/c)^2 \check{\mathbf{B}}^2}{(\check{\mathbf{B}}^2)^2} - 1 = -2 \frac{\beta^2}{\check{\mathbf{B}}^2}$$

(35)

$$G_{34} = X_{(3)}^\mu g_{\mu\nu} X_{(4)}^\nu = \frac{\beta^2 (\mathbf{E}/c)^2 + (\mathbf{E}/c)^2 \check{\mathbf{B}}^2}{(\mathbf{E}^2/c^2)^2} - 1 = 2 \frac{c^2 \beta^2}{\mathbf{E}^2}$$

Par ailleurs les solutions des équations d'évolution (5) prennent la forme

$$\begin{aligned} f_{(1)}(\tau) &= a_{(1)} \omega_{(0)} \tau & , & & f_{(2)}(\tau) &= a_{(2)} \omega_{(0)} \tau \\ \text{et} \quad f_{(3)}(\tau) &= f_{(4)}(\tau)^* & = & & a_{(3)} \exp(i \omega_{(0)} \tau) & \end{aligned} \quad (36)$$

où

$$\omega_{(0)} = \frac{Q \beta}{m} \quad (37)$$

On relèvera encore que le quadrivecteur $r(\tau)$ étant réel à chaque instant il faut que les constantes $a_{(1)}$, $a_{(2)}$ soient réelles. Compte tenu de ce qui précède la condition (8.91) prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{dr^\mu(\tau)}{d\tau} g_{\mu\nu} \frac{dr^\nu(\tau)}{d\tau} &= 2 \left[\frac{a_{(1)} a_{(2)}}{(\omega_{(0)})^2} G_{12} + \frac{|a_{(3)}|^2}{(\omega_{(0)})^2} G_{34} \right] \\ &= 4 \left(\frac{Q \beta^2}{m} \right)^2 \left[\frac{-a_{(1)} a_{(2)}}{\check{\mathbf{B}}^2} + |a_{(3)}|^2 \frac{c^2}{\mathbf{E}^2} \right] = -c^2 \end{aligned}$$

et par conséquent

$$|a_{(3)}|^2 = \frac{\mathbf{E}^2}{c^2 \check{\mathbf{B}}^2} \left[a_{(1)} a_{(2)} - \left(\frac{m c}{2 Q \beta} \right)^2 \frac{\check{\mathbf{B}}^2}{\beta^2} \right] \geq 0 \quad (38)$$

La condition (8.91) ne peut donc être satisfaite que si

$$a_{(1)} a_{(2)} \geq \frac{m^2 c^2}{4 Q^2 \beta^2} \frac{\check{\mathbf{B}}^2}{\beta^2} \geq 0 \quad (39)$$

En groupant les résultats obtenus il vient

$$t(\tau) = r^4(\tau) = \frac{a_{(1)} + a_{(2)}}{c} \omega_{(0)} \tau + 2 \frac{|a_3|}{c} \cos(\omega_{(0)} \tau + \delta) \quad (40)$$

Dans cette expression le symbole δ désigne l'argument du nombre complexe a_3 . Pour que $dt(\tau)/d\tau \geq 1$ quel que soit le temps propre τ il faut et il suffit que $(a_1 + a_2) > 0$. Ensuite, pour la position dans l'espace, il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\tau) = & \left(a_{(1)} \mathbf{X}_{(1)} + a_{(2)} \mathbf{X}_{(2)} \right) \omega_{(0)} \tau \\ & + a_3 \mathbf{X}_{(3)} \exp(i \omega_{(0)} \tau) + a_3^* \mathbf{X}_{(3)}^* \exp(-i \omega_{(0)} \tau) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\tau) = & \left((a_{(1)} - a_{(2)}) \frac{\beta \check{\mathbf{B}}}{\check{\mathbf{B}}^2} + (a_{(1)} + a_{(2)}) \frac{(\mathbf{E}/c) \wedge \check{\mathbf{B}}}{\check{\mathbf{B}}^2} \right) \omega_{(0)} \tau \\ & + 2 |a_3| \left(\frac{-c \beta (\mathbf{E})}{\mathbf{E}^2} \sin(\omega_{(0)} \tau + \delta) + \frac{(\mathbf{E}) \wedge (c \check{\mathbf{B}})}{\mathbf{E}^2} \cos(\omega_{(0)} \tau + \delta) \right) \end{aligned} \quad (41)$$

Le mouvement se compose donc d'un mouvement rectiligne dans le plan engendré par les vecteurs $\check{\mathbf{B}}$ et $\mathbf{E} \wedge \check{\mathbf{B}}$ au quel s'ajoute un mouvement elliptique dans le plan engendré par les vecteurs \mathbf{E} et $\mathbf{E} \wedge \check{\mathbf{B}}$.

On notera enfin que par un choix approprié de l'origine du temps propre τ on pourra annuler le déphasage δ .

3) Discutons finalement la situation très particulière dans laquelle $\mathbf{E} \cdot \check{\mathbf{B}} = 0$ et $\|\mathbf{E}\| = c \|\check{\mathbf{B}}\|$. Dans cette situation la seule valeur propre est $\lambda = 0$. Par conséquent la matrice d'éléments

$$F^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho} F_{\rho\nu}$$

est nécessairement nilpotente. En fait il est facile de vérifier que

$$(F^3)^\mu{}_\nu \equiv F^\mu{}_\rho F^\rho{}_\sigma F^\sigma{}_\nu = 0 \quad , \forall \mu \text{ et } \nu \quad (42)$$

Pour résoudre le problème posé exprimons la solution des l'équations d'évolution (1) sous la forme d'un développement de Taylor,

$$r(\tau) = r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \frac{\tau^n}{n!}$$

dont les coefficients r_0 et v_n , $n = 1, 2, \dots$ sont des quadrivecteurs à déterminer. L'introduction de ce développement dans l'équation (1) suivi de l'identification des termes de même puissance en τ conduit aux relations suivantes

$$v_{n+2}^\mu = \frac{Q}{m} F^\mu{}_\nu v_{n+1}^\nu \quad n = 0, 1, \dots \quad (43)$$

Le quadrivecteur r_0 peut être assimilé au quadrivecteur 0 sans perte de généralité puisque le champ électromagnétique est homogène. Or, il suit de la relation de récurrence qui précède que

$$v_n^\mu = \left(\frac{Q}{m}\right)^{n-1} (F^{n-1})^\mu{}_\nu v_1^\nu, \quad n = 1, 2, \dots$$

Il suit donc de (42) que les quadrivecteurs v_n sont nuls dès que $n \geq 4$. Par conséquent la solution des équations d'évolution recherchée s'écrit

$$\begin{aligned} r^\mu(\tau) &= r_0^\mu + v_1^\mu \tau + v_2^\mu \frac{\tau^2}{2!} + v_3^\mu \frac{\tau^3}{3!} \\ &= r_0^\mu + \left(\delta^\mu{}_\nu \tau + \frac{Q}{m} \frac{\tau^2}{2!} F^\mu{}_\nu + \left(\frac{Q}{m}\right)^2 \frac{\tau^3}{3!} (F^2)^\mu{}_\nu \right) v_1^\nu \end{aligned} \quad (44)$$

Pour que la condition (8.91) ainsi que la condition $dr^4(\tau)/d\tau \equiv dt(\tau)/d\tau \geq 1$ soient satisfaites il suffit qu'elles le soient à l'instant $\tau = 0$. Par conséquent elles sont satisfaites dès que

$$(v_1)^2 = -c^2 \quad \text{autrement dit dès que} \quad v_1^4 = \sqrt{1 + \mathbf{v}_1^2/c^2} \quad (45)$$

Au sujet de la forme explicite des termes qui figurent dans l'expression (44) on notera que

$$F^\mu{}_\nu v^\nu = \left(\mathbf{v} \wedge \check{\mathbf{B}} + v^4 \mathbf{E}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}/c^2 \right)$$

et que

$$(F^2)^\mu{}_\nu v^\nu = \left((\mathbf{v} \wedge \check{\mathbf{B}} + v^4 \mathbf{E}) \wedge \check{\mathbf{B}} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}/c^2, (\mathbf{v} \wedge \check{\mathbf{B}} + v^4 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E}/c^2 \right)$$

On constate alors que le mouvement de la particule chargée est un mouvement de translation selon la direction \mathbf{v}_1 auquel se superpose un mouvement dans le plan orthogonal au champ d'induction $\check{\mathbf{B}}$.

